

2018 北京通州区潞河中学高二（上）期末

数 学（理）

2018.1

本试卷共 8 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 （选择题 共 75 分）

一、选择题(共 15 小题，每小题 5 分，共 75 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 若经过 $A(3, m)$, $B(1, 2)$ 两点的直线的倾斜角为 45° , 则 $m =$

- (A) 6 (B) -6 (C) 4 (D) -4

2. 椭圆 $9x^2 + 4y^2 = 1$ 的短轴长为

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) 4 (D) 6

3. 若直线 $l_1: y = -x + 2a$ 与直线 $l_2: y = (a^2 - 2)x - 2$ 平行, 则 $a =$

- (A) 1 (B) -1 (C) $\pm\sqrt{3}$ (D) ± 1

4. 双曲线 $y^2 - x^2 = 2$ 的一条渐近线方程是

- (A) $y = 2x$ (B) $y = \sqrt{2}x$ (C) $y = x$ (D) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

5. 点 A 的极坐标为 $(2, \frac{5\pi}{6})$, 则 A 的直角坐标为

- (A) $(1, -\sqrt{3})$ (B) $(-1, \sqrt{3})$ (C) $(\sqrt{3}, -1)$ (D) $(-\sqrt{3}, 1)$

6. 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点在直线 $2x - y + 3 = 0$ 上, 则 $p =$

- (A) 12 (B) 6 (C) 3 (D) $\frac{3}{2}$

7. 方程 $x = \sqrt{8 - y^2}$ 表示的曲线是
- (A) 半个圆 (B) 双曲线的一支 (C) 一个圆 (D) 双曲线
8. 以 $A(2, -5)$, $B(4, -1)$ 为端点的线段的垂直平分线方程是
- (A) $2x - y + 9 = 0$ (B) $x + 2y - 3 = 0$
(C) $2x - y - 9 = 0$ (D) $x + 2y + 3 = 0$
9. 已知直线 $kx - y + 2 - 4k = 0$, 当 k 变化时, 所有的直线恒过定点
- (A) $(4, -2)$ (B) $(4, 2)$ (C) $(-4, 2)$ (D) $(-4, -2)$
10. 与 x 轴相切, 且圆心坐标为 $(-2, 3)$ 的圆的标准方程为
- (A) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ (B) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$
(C) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ (D) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$
11. 已知直线 $y = (3 - k)x + 6$ 不经过第四象限, 则 k 的取值范围为
- (A) $k > 3$ (B) $k \geq 3$ (C) $k < 3$ (D) $k \leq 3$
12. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线过椭圆 C 的焦点, 交椭圆 C 于 A, B 两点, $\angle AF_2F_1 = 45^\circ$, 则椭圆 C 的离心率等于
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) 2
13. 圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 上到直线 $l: x + y + 1 = 0$ 的距离为 1 的点有
- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
14. “ $5 < m < 7$ ” 是 “方程 $\frac{x^2}{7 - m} + \frac{y^2}{m - 5} = 1$ 表示椭圆” 的
- (A) 充分必要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

15. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 至少有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围是

- (A) $(1, 2\sqrt{2}]$ (B) $[2\sqrt{2}, +\infty)$ (C) $(1, 3]$ (D) $[3, +\infty)$

第二部分 (非选择题 共 75 分)

二、填空题(共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案写在答题纸上.)

16. 曲线 $\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = -2 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的对称中心为 _____.

17. 椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 则 $m =$ _____.

18. 点 M, N 在圆 $x^2 + y^2 + 2kx - 2y - 4 = 0$ 上, 且点 M, N 关于直线 $2x - y + 1 = 0$ 对称, 则 $k =$ _____.

19. 已知实数 x, y 满足 $2x + y + 3 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$ 的最小值为 _____.

20. 已知两定点 $M(-2, 0), N(2, 0)$, 若直线上存在点 P , 使得 $|PM| + |PN| = 6$, 则该直线为“ T 型直线”. 给出下列直线, 其中是“ T 型直线”的是 _____.

- ① $y = x + 2$ ② $y = 3$ ③ $y = -x + 3$ ④ $y = \frac{1}{2}x + 3$

三、解答题(共 4 小题, 共 50 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

21. (本小题满分 10 分)

一条光线从点 $A(-2, 1)$ 射出, 经 x 轴反射后与圆 $C: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4$ 相交于点 M, N , 且 $|MN| = 2\sqrt{3}$, 求反射光线所在的直线方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知点 $A(-3, 0), B(3, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积为 $\frac{16}{9}$.

(I) 求点 M 的轨迹方程;

(II) 若点 $P(4, 2), F(5, 0)$, 求 $|MP| + |MF|$ 的最小值.

23. (本小题满分 14 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 l 过焦点 F 交抛物线于 A, B 两点, $|AF| = \frac{1}{5}|AB| = 5$, 点 A 的纵坐标为 1.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 若点 M 是抛物线 C 位于曲线 AOB (O 为坐标原点) 上一点, 求 $\triangle ABM$ 的最大面积.

24. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(0, \sqrt{3})$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 已知点 $A(-2, 1), B(-3, 0)$, 过点 B 的直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 + k_2$ 为定值.

数学试题答案

一、选择题:本大题共 15 小题,每小题 5 分,共 75 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	A	C	D	B	A	D	B	C
题号	11	12	13	14	15					
答案	D	B	B	C	D					

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

16. $(3, -2)$

17. 10

18. 0

19. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

20. ①③

三、解答题:

21. (本小题满分 10 分)

解:点 $A(-2, 1)$ 关于 x 轴的对称点为 $B(-2, -1)$,

(1)当反射光线的斜率不存在时,反射光线所在的直线方程为: $x = -2$,

此时,圆心 $(-3, 5)$ 到反射光线的距离为 1,且圆的半径为 2,

所以反射光线被圆所截得的弦长 $|MN| = 2\sqrt{4-1} = 2\sqrt{3}$,符合题意.

(2)当反射光线的斜率存在时,设反射光线的斜率为 k ,则反射光线所在的直线方程为 $y+1=k(x+2)$ 即 $kx-y+2k-1=0$.

因为反射光线被圆所截得的弦长 $|MN| = 2\sqrt{3}$,且圆的半径为 2,

所以圆心到反射光线的距离为 $d = \sqrt{r^2 - (\frac{|MN|}{2})^2} = \sqrt{4-3} = 1$.

而圆心 $(-3, 5)$ 到反射光线的距离 $d = \frac{|-3k-5+2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$,

即 $\frac{|-3k-5+2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 解得 $k=-\frac{35}{12}$.

所以反射光线所在的直线方程为 $-\frac{35}{12}x-y+2(-\frac{35}{12})-1=0$ 即 $35x+12y+82=0$.

综上, 反射光线所在的直线方程为 $x=-2$ 和 $35x+12y+82=0$.

22. (本小题满分 12 分)

解: (I) 设 $M(x, y)$, 则 $k_{AM}=\frac{y}{x+3}, k_{BM}=\frac{y}{x-3}$, 且 $x \neq \pm 3$

因为 $k_{AM} \cdot k_{BM} = \frac{16}{9}$, 即 $\frac{y}{x+3} \cdot \frac{y}{x-3} = \frac{16}{9}$, 且 $x \neq \pm 3$

所以点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 (x \neq \pm 3)$.

(II) 由 (I) 知, 点 M 的轨迹方程是双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 (x \neq \pm 3)$

所以 $a=3, b=5, c=5$.

所以 F 为双曲线的右焦点, 设双曲线的左焦点为 F_1 ,

因为 $P(4, 2)$ 在第一象限, 所以若 $|MP| + |MF|$ 最小, 则 M 在双曲线的右支上.

由双曲线的定义知 $|MF_1| - |MF| = 2a = 6$, 则 $|MF| = |MF_1| - 6$,

所以 $|MP| + |MF| = |MP| + |MF_1| - 6$

因为两点之间线段最短, 所以连接 PF_1 , 则直线 PF_1 与双曲线的交点即为 M

所以 $(|MP| + |MF_1|)_{\min} = |PF_1| = \sqrt{(4-(-5))^2 + (2-0)^2} = \sqrt{85}$.

所以 $|MP| + |MF|$ 的最小值为 $\sqrt{85} - 6$.

23. (本小题满分 14 分)

解: (I) 因为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 所以 $F(0, \frac{p}{2})$.

又因为点 A 在抛物线上, 且纵坐标为 1,

由抛物线的定义知: $|AF| = 1 + \frac{p}{2} = 5$, 所以 $p = 8$.

所以抛物线的方程为: $x^2 = 16y$.

(II) 因为点 A 在抛物线上, 且纵坐标为 1, 所以 $A(-4, 1)$ 或 $A(4, 1)$

因为直线 l 过抛物线的焦点 $F(0, 4)$

当 $A(-4, 1)$ 时, 直线 l 的方程为 $3x - 4y + 16 = 0$

当与直线 l 平行且与抛物线相切于第一象限的点 M 时, $\triangle ABM$ 面积取得最大值

设直线方程为 $3x - 4y + c = 0$

由 $\begin{cases} x^2 = 16y \\ 3x - 4y + c = 0 \end{cases}$ 知 $x^2 - 12x - 4c = 0$, 由 $\Delta = (-12)^2 - 4 \times (-4c) = 0$ 知 $c = -9$

直线方程为 $3x - 4y - 9 = 0$

此时两平行线间的距离为 $d = \frac{|16 - (-9)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$

因为 $|AB| = 25$

所以 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times 25 \times 5 = \frac{125}{2}$.

同理当 $A(4, 1)$ 时, 所以 $(S_{\triangle ABM})_{\max} = \frac{125}{2}$.

综上, $\triangle ABM$ 面积的最大值为 $\frac{125}{2}$

24. (本小题满分 14 分)

解: (I) 因为椭圆过点 $(0, \sqrt{3})$, 所以 $b = \sqrt{3}$

因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $a = \sqrt{6}, c = \sqrt{3}$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 因为过点 $B(-3,0)$ 的直线 l 与椭圆交于 P, Q 两点, 所以直线 l 的斜率一定存在, 设为 k ,

则直线 l 的方程为: $y = k(x+3)$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x+3) \end{cases} \text{消 } y \text{ 得: } (2k^2+1)x^2 + 12k^2x + 18k^2 - 6 = 0$$

$$\text{所以} \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{2k^2+1} \\ x_1x_2 = \frac{18k^2-6}{2k^2+1} \end{cases}$$

$$\text{因为 } A(-2,1), \text{ 所以 } k_1 = \frac{y_1-1}{x_1+2}, k_2 = \frac{y_2-1}{x_2+2}$$

$$\text{所以 } k_1 + k_2 = \frac{y_1-1}{x_1+2} + \frac{y_2-1}{x_2+2} = \frac{(kx_1+3k-1)(x_2+2) + (kx_2+3k-1)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 + (5k-1)(x_1+x_2) + 4(3k-1)}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}$$

$$= \frac{2k \cdot \frac{18k^2-6}{2k^2+1} + (5k-1) \cdot \frac{-12k^2}{2k^2+1} + 4(3k-1)}{\frac{18k^2-6}{2k^2+1} + 2 \cdot \frac{-12k^2}{2k^2+1} + 4} = \frac{4(k^2-1)}{2(k^2-1)}$$

$$= 2$$

综上, $k_1 + k_2$ 为定值 2.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生, 助力千万学子,

圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980