

# 2020 北京朝阳高三（上）期末

## 数 学

2020.1

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，将本试卷和答题卡一并交回。

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 在复平面内，复数  $i(2+i)$  对应的点的坐标为

- (A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (-1, 2) (D) (2, -1)

(2) 已知  $a = 3^{-2}$ ,  $b = \log_{0.5} 2$ ,  $c = \log_2 3$ , 则

- (A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $b > c > a$  (D)  $c > a > b$

(3) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) 的离心率为 2, 则其渐近线方程为

- (A)  $y = \pm\sqrt{2}x$  (B)  $y = \pm\sqrt{3}x$  (C)  $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$  (D)  $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

(4) 在  $\triangle ABC$  中, 若  $b = 3$ ,  $c = \sqrt{6}$ ,  $C = \frac{\pi}{4}$ , 则角  $B$  的大小为

- (A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{3}$  或  $\frac{2\pi}{3}$

(5) 从 3 名教师和 5 名学生中, 选出 4 人参加“我和我的祖国”快闪活动. 要求至少有一名教师人选, 且入选教师人数不多于入选学生人数, 则不同的选派方案的种数是

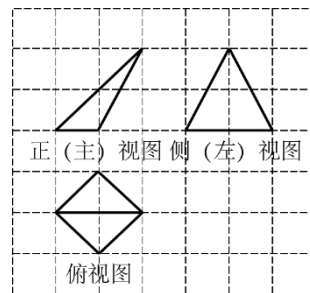
- (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 120

(6) 已知函数  $f(x) = e^{|x|} - e^{-|x|}$ , 则  $f(x)$

- (A) 是奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增  
(B) 是奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减  
(C) 是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增  
(D) 是偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减

(7) 某三棱锥的三视图如图所示, 已知网格纸上小正方形的边长为 1, 则该几何体的体积为

- (A)  $\frac{2}{3}$   
(B)  $\frac{4}{3}$   
(C) 2  
(D) 4



第7题图

(8) 设函数  $f(x) = x^2 - 3x + a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), 则“ $a > 2$ ”是“ $f(x)$  有且只有一个零点”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 以 $B$ 为圆心的圆与直线 $AC$ 相切. 若点 $P$ 是圆 $B$ 上的动点, 则 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值是

- (A)  $2\sqrt{2}$  (B)  $4\sqrt{2}$  (C) 4 (D) 8

(10) 笛卡尔、牛顿都研究过方程  $(x-1)(x-2)(x-3)=xy$ , 关于这个方程的曲线有下列说法:

- ①该曲线关于  $y$  轴对称;  
②该曲线关于原点对称;  
③该曲线不经过第三象限;  
④该曲线上有且只有三个点的横、纵坐标都是整数.

- (A) ②③ (B) ①④ (C) ③ (D) ③④

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

### 二、填空题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(11)  $(2x + \frac{1}{x})^4$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_.

(12) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 $a_1, a_3, a_4$ 成等比数列, 则 $a_2=$ \_\_\_\_\_; 数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和的最小值为\_\_\_\_\_.

(13) 若顶点在原点的抛物线经过四个点  $(1, 1)$ ,  $(2, \frac{1}{2})$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 2)$  中的 2 个点, 则该抛物线的标准方程可以是\_\_\_\_\_.

(14) 春天即将来临, 某学校开展以“拥抱春天, 播种绿色”为主题的植物种植体验活动. 已知某种盆栽植物每株成活的概率为 $P$ , 各株是否成活相互独立. 该学校的某班随机领养了此种盆栽植物 10 株, 设 $X$ 为其中成活的株数, 若 $X$ 的方差 $DX=2.1$ ,  $P(X=3) < P(X=7)$ , 则 $P=$ \_\_\_\_\_.

(15) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $R$ , 且 $f(x+\pi)=2f(x)$ , 当 $x \in [0, \pi)$ 时,  $f(x)=\sin x$ . 若存在 $x_0 \in (-\infty, m]$ , 使得 $f(x_0) \geq 4\sqrt{3}$ , 则 $m$ 的取值范围为\_\_\_\_\_.

(16) 某学校数学建模小组为了研究双层玻璃窗户中每层玻璃厚度 $d$  (每层玻璃的厚度相同) 及两层玻璃间夹空气层厚度 $l$ 对保温效果的影响, 利用热传导概率得到热传导量 $q$ 满足关系式:  $q = \lambda_1 \frac{|\Delta T|}{d(\frac{\lambda_1 l}{\lambda_2 d} + 2)}$ , 其中玻璃的热传导系数 $\lambda_1=4 \times 10^{-3}$ 焦耳/(厘米·度), 不流通、干燥空气的热传导系数 $\lambda_2=2.5 \times 10^{-4}$ 焦耳/(厘米·度),  $\Delta T$ 为室内外温度差.  $q$ 值越小, 保温效果越好. 现有 4 种型号的双层玻璃窗户, 具体数据如下表:

| 型号  | 每层玻璃厚度 $d$ (单位: 厘米) | 玻璃间夹空气层厚度 $l$ (单位: 厘米) |
|-----|---------------------|------------------------|
| A 型 | 0.5                 | 3                      |
| B 型 | 0.5                 | 4                      |
| C 型 | 0.6                 | 2                      |
| D 型 | 0.6                 | 3                      |

则保温效果最好的双层玻璃的型号是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题，共 86 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) .

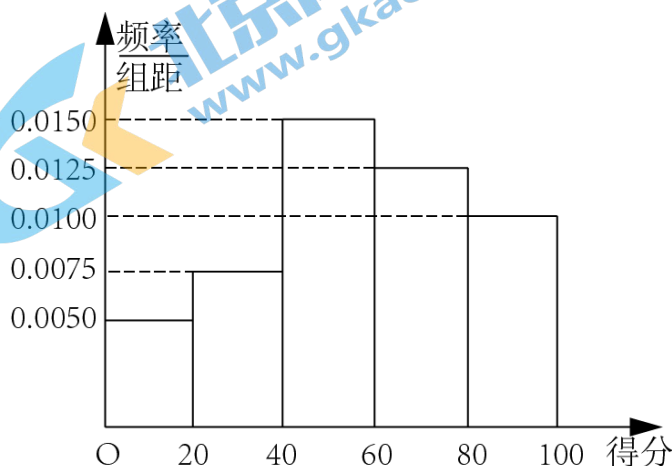
(I) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求  $f(x)$  的单调递增区间;

(III) 对于任意  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  都有  $f(x) < 0$  恒成立, 求  $m$  的取值范围.

(18) (本小题 14 分)

某学校组织了垃圾分类知识竞赛活动, 设置了四个箱子, 分别写有“厨余垃圾”、“有害垃圾”、“可回收物”、“其他垃圾”; 另有卡片若干张, 每张卡片上写有一种垃圾的名称. 每位参赛选手从所有卡片中随机抽取 20 张, 按照自己的判断, 将每张卡片放入对应的箱子中. 按规则, 每正确投放一张卡片得 5 分, 投放错误得 0 分. 比如将写有“废电池”的卡片放入写有“有害垃圾”的箱子, 得 5 分, 放入其它箱子, 得 0 分. 从所有参赛选手中随机抽取 20 人, 将他们的得分分别按照  $[0, 20]$ ,  $(20, 40]$ ,  $(40, 60]$ ,  $(60, 80]$ ,  $(80, 100]$  分组, 绘成频率分布直方图如下:



(I) 分别求出所抽取的 20 人中得分落在组  $[0, 20]$  和  $(20, 40]$  内的人数;

(II) 从所抽取的 20 人中得分落在组  $[0, 40]$  的选手中随机选取 3 名选手, 以  $X$  表示这 3 名选手中得分不超过 20 分的人数, 求  $X$  的分布列和数学期望;

(III) 如果某选手将抽到的 20 张卡片逐一随机放入四个箱子, 能否认为该选手不会得到 100 分? 请说明理由.

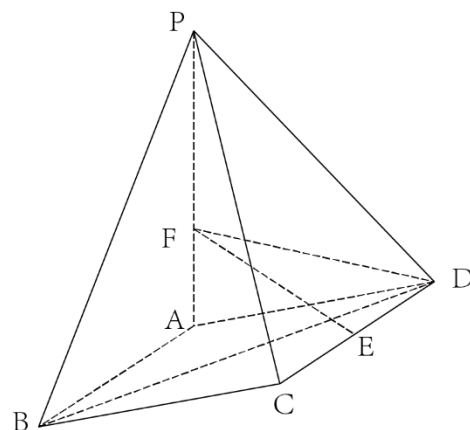
(19) (本小题 15 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是边长为 2 的菱形,  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = 3$ ,  $PF = 2FA$ ,  $E$  为  $CD$  的中点.

(I) 求证:  $BD \perp PC$ ;

(II) 求异面直线  $AB$  与  $DF$  所成角的余弦值;

(III) 判断直线  $EF$  与平面  $PBC$  的位置关系, 请说明理由.



(20) (本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 过点  $P(-1, \frac{3}{2})$ , 且椭圆  $C$  的一个顶点  $D$  的坐标为  $(-2, 0)$ . 过椭圆  $C$  的右焦点  $F$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $A, B$  ( $A, B$  不同于点  $D$ ), 直线  $DA$  与直线  $m: x = 4$  交于点  $M$ . 连接  $MF$ , 过点  $F$  作  $MF$  的垂线与直线  $m$  交于点  $N$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程, 并求点  $F$  的坐标;

(II) 求证:  $D, B, N$  三点共线.

(21) (本小题 14 分)

已知函数  $f(x) = (\sin x + a) \ln x, a \in \mathbb{R}$ .

(I) 若  $a = 0$ ,

(i) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$  处的切线方程;

(ii) 求函数  $y = f(x)$  在区间  $(1, \pi)$  内的极大值的个数.

(II) 若  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内单调递减, 求实数  $a$  的取值范围.

(22) (本小题 3 分)

设  $m$  为正整数, 各项均为正整数的数列  $\{a_n\}$  定义如下:  $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数,} \\ a_n + m, & a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

(I) 若  $m = 5$ , 写出  $a_8, a_9, a_{10}$ ;

(II) 求证: 数列  $\{a_n\}$  单调递增的充要条件  $m$  为偶数;

(III) 若  $m$  为奇数, 是否存在  $n > 1$  满足  $a_n = 1$ ? 请说明理由.

# 2020 北京朝阳高三（上）期末数学

## 参考答案

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

- (1) C (2) D (3) B (4) D (5) C  
(6) C (7) A (8) A (9) D (10) C

### 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

- (11) 24 (12) -6; -20 (13)  $x^2 = 8y$  或  $y^2 = x$   
(14) 0.7 (15)  $[\frac{10\pi}{3}, +\infty)$  (16) B

三、解答题（共 6 小题，共 86 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

(17)（本小题 15 分）

解：(I) 因为  $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + m$   
$$= \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + m + 1$$
$$= 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + m + 1$$

所以函数  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$  .....5 分

(II) 由 (I) 知  $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + m + 1$ .

又函数  $y = \sin x$  的单调递增区间为  $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

由  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

得  $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) .....10 分

(III) 因为  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{7\pi}{6}$ .

所以  $-\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$ .

所以  $m \leq 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + m + 1 \leq m + 3$ .

当  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x)$  的最大值为  $m + 3$ .

又因为  $f(x) < 0$  对于任意  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  恒成立, 所以  $m + 3 < 0$ , 即  $m < -3$ .

所以  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -3)$  .....15 分

(18)（本小题 14 分）

解：(I) 由题意知, 所抽取的 20 人中得分落在组  $[0, 20]$  的人数  $0.0050 \times 20 \times 20 = 2$  (人),



得分落在组  $(20, 40]$  的人数有  $0.0075 \times 20 \times 20 = 3$  (人) .

所以所抽取的 20 人中得分落在组  $[0, 20]$  的人数有 2 人, 得分落在组  $(20, 40]$  的人数有 3 人. ....4 分

(II)  $x$  的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(x=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

$$P(x=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10},$$

$$P(x=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

所以  $X$  的分布列为

|     |                |                |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0              | 1              | 2              |
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

所以  $X$  的期望  $EX = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = 1.2$  .....10 分

(III) 答案不唯一.

答案示例 1: 可以认为该选手不会得到 100 分, 理由如下:

该选手获得 100 分的概率是  $(\frac{1}{4})^{20}$ , 概率非常小, 故可以认为该选手不会的都 100 分.

答案示例 2: 不能认为该选手不会得到 100 分, 理由如下:

该选手获得 100 分的概率是  $(\frac{1}{4})^{20}$ , 虽然概率非常小, 但是也可能发生, 故不能认为该选手不会得到 100 分. ....14 分

(19) (本小题 15 分)

解: (I) 连结  $AC$ .

因为底面  $ABCD$  是菱形, 所以  $BD \perp AC$ .

又因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BD \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $PA \perp BD$

又因为  $PA \cap AC = A$ .

所以  $BD \perp$  平面  $PAC$ .

又因为  $PC \subset$  平面  $PAC$

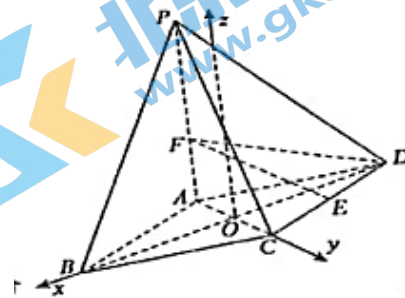
所以  $BD \perp PC$  .....4 分

(II) 设  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ .

因为底面  $ABCD$  是菱形, 所以  $AC \perp BD$ .

又因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,

所以  $PA \perp AC$ ,  $PA \perp BD$ .



如图，以 $O$ 为坐标原点，以 $OB$ 为 $x$ 轴，以 $OC$ 为 $y$ 轴，以过点 $O$ 且与 $AP$ 平行的直线为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ,

则 $A(0, -1, 0)$ ,  $B(\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $D(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $E(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $P(0, -1, 3)$   
 $F(0, -1, 1)$

则 $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{DF} = (-\sqrt{3}, -1, 1)$ ,

该异面直线 $AB$ 与 $DF$ 所成角为 $\odot$ ,  $\odot \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ,

则 $\cos \odot = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DF} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DF}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DF}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

所以 $AB$ 与 $DF$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . .....10分

(III) 直线 $EF$ 与平面 $PBC$ 相交. 证明如下:

由(II)可知,  $\overrightarrow{EF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3}, -1, 3)$

设平面 $PBC$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \end{cases}$  即 $\begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0, \\ -\sqrt{3}x - y + 3z = 0, \end{cases}$  令 $x = \sqrt{3}$ , 得 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 3, 2)$

则 $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1) \cdot (\sqrt{3}, 3, 2) \neq 0$ ,

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 因为点 $P(-1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 $C$ 上, 且椭圆 $C$ 的一个顶点 $D$ 的坐标为 $(-2, 0)$ ,

所以 $\begin{cases} a = 2 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$  解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

所以椭圆 $C$ 的右焦点 $F$ 的坐标为 $(1, 0)$  ... .....4分

(II) ①当直线 $l$ 的倾斜率不存在时, 直线 $AB$ 的方程为 $x = 1$ .

显然,  $A(1, \frac{3}{2})$ ,  $B(1, -\frac{3}{2})$  或  $A(1, -\frac{3}{2})$ ,  $B(1, \frac{3}{2})$

当 $A(1, \frac{3}{2})$ ,  $B(1, -\frac{3}{2})$  时为, 直线 $DA$ 的方程 $y = \frac{1}{2}(x+2)$ , 点 $M$ 的坐标为 $(4, 3)$

所以 $K_{MF} = 1$ .

直线 $FN$ 的方程为 $y = -(x-1)$ , 点 $N$ 的坐标为 $(4, -3)$ .

则 $\overrightarrow{DB} = (3, -\frac{3}{2})$ ,  $\overrightarrow{DN} = (6, -3)$ .

所以 $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DB}$ , 所以 $D, B, N$ 三点共线.

同理, 当 $A(1, -\frac{3}{2})$ ,  $B(1, \frac{3}{2})$  时,  $D, B, N$ 三点共线.

②当直线 $l$ 的斜率存在时, 设直线 $l$ 的方程为 $y = k(x-1)$ .

由  $\begin{cases} y = k(x-1) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$  得  $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + (4k^2 - 12) = 0$ ,

且  $\Delta = (-8k^2)^2 - 4(3+4k^2)(4k^2 - 12) = 144k^2 + 144 > 0$ .

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

则  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}$

直线  $DA$  的方程为  $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ , 点  $M$  的坐标为  $(4, \frac{6y_1}{x_1+2})$

所以  $K_{MF} = \frac{\frac{6y_1}{x_1+2} - 0}{4-1} = \frac{2y_1}{x_1+2}$ .

直线  $NF$  的方程为  $y = \frac{x_1+2}{2y_1}(x-1)$ , 点  $N$  的坐标为  $(4, -\frac{3(x_1+2)}{2y_1})$ .

则  $\overrightarrow{DB} = (x_2 + 2, y_2)$ ,  $\overrightarrow{DN} = (6, -\frac{3(x_1+2)}{2y_1})$ .

所以  $(x_2 + 2) \cdot \frac{-3(x_1+2)}{2y_1} - 6y_2$   
 $= -\frac{3}{2y_1} [(x_1 + 2)(x_2 + 2) + 4y_1 y_2]$   
 $= -\frac{3}{2y_1} [(x_1 + 2)(x_2 + 2) + 4k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1)]$   
 $= -\frac{3}{2y_1} [(1+4k^2)x_1 x_2 + (2-4k^2)(x_1 + x_2) + 4k^2 + 4]$   
 $= -\frac{3}{2y_1} [(1+4k^2) \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2} + (2-4k^2) \frac{8k^2}{3+4k^2} + 4k^2 + 4]$   
 $= -\frac{3}{2y_1} \cdot \frac{(1+4k^2)(4k^2 - 12)(2-4k^2)8k^2 + (4k^2 + 4)(3+4k^2)}{3+4k^2}$   
 $= -\frac{3}{2y_1} \cdot \frac{4k^2 - 12 + 16k^4 - 48k^2 + 16k^2 - 32k^4 + 12k^2 + 12 + 16k^4 + 16k^2}{3+4k^2}$   
 $= 0$

所以  $\overrightarrow{DB}$  与  $\overrightarrow{DN}$  共线,

又因为  $D$  为公共点,

所以  $D, B, N$  三点共线.

综上所述  $D, B, N$  三点共线. ....15 分

(21) (本小题 14 分)

解: (I) (i) 因为  $f(x) = \sin x \ln x$ ,

所以  $f(\frac{\pi}{2}) = \ln \frac{\pi}{2}$ ,  $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos \ln x + \frac{\sin x}{x} f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$  处的切线方程为  $y = \ln \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}(x - \frac{\pi}{2})$

化简得  $2x - \pi y - \pi + \pi \ln \frac{\pi}{2} = 0$ . ....4 分

(ii) 当  $x \in (1, \frac{\pi}{2})$  时,  $f'(x) > 0$ .  $f(x)$  单调递增, 此时  $f(x)$  无极大值.



当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时, 设  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = -\sin x \ln x + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} < 0$ ,

所以  $f'(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内单调递减.

又因为  $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} > 0$ ,  $f'(\pi) = -\ln \pi < 0$ ,

所以在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内存在唯一的  $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使得  $f'(x_0) = 0$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化如下表

| $x$     | $(\frac{\pi}{2}, x_0)$ | $x_0$ | $(x_0, \pi)$ |
|---------|------------------------|-------|--------------|
| $f'(x)$ | +                      | 0     | -            |
| $f(x)$  | ↗                      |       | ↘            |

所以  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, x_0)$  单调递增, 在  $(x_0, \pi)$  内单调递减, 此时  $f(x)$  有唯一极大值.

综上所述,  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内的极大值的个数为 1.....10 分

(II) 由题可知  $f'(x) = \frac{\sin x + a}{x} + \cos x \ln x$ , 其中  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

当  $a \leq -1$  时,  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内单调递减;

下面设  $a > -1$ .

对于  $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\ln x < \ln \pi < \ln e^2 = 2$ , 且  $\cos x < 0$ ,

所以  $\cos \ln x > 2\cos x$

所以当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $f'(x) > \frac{\sin x + a}{x} + 2\cos x = \frac{\sin x + a + 2x\cos x}{x}$ .

设  $h(x) = \sin x + 2x\cos x + a$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,

则  $h'(x) = \cos x + 2\cos x - 2x\sin x = 3\cos x - 2x\sin x < 0$ .

所以  $h(x)$  在  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  上单调递减.

$h(\frac{\pi}{2}) = 1 + a > 0$ , 且  $h(\pi) = -2\pi + a$ .

当  $-2\pi + a \geq 0$  时, 即  $a \geq 2\pi$  时,  $h(\pi) \geq 0$  时, 对于  $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $h(x) > 0$ .

所以  $f'(x) > 0$  时,  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内单调递增, 不符合题意.

当  $-2\pi + a < 0$ , 即  $-1 < a < 2\pi$  时,  $h(\frac{\pi}{2}) > 0$ ,  $h(\pi) < 0$ ,

所以  $\exists x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 使  $h(x_0) = 0$ .

因为  $h(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内单调递减,

所以对  $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, x_0)$ ,  $h(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ .

所以  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, x_0)$  内单调递增, 不符合题意.

所以当  $a > -1$  时,  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  不单调递减.

综上可知 $a \leq -1$ ,

所以 $a$ 的取值范围为 $(-\infty, -1]$ .....

(22) (本小题 13 分)

解 (I)  $a_8 = 6, a_9 = 3, a_{10} = 8$  .....3 分

(II) 先证“充分性”.

当 $m$ 为偶数时, 若 $a_n$ 为奇数, 则 $a_{n+1}$ 为奇数.

因为 $a_1 = 1$ 为奇数, 所以归纳可得, 对 $\forall n \in N^*, a_n$ 均为奇数, 则 $a_{n+1} = a_n + m$ ,

所以 $a_{n+1} - a_n = m > 0$ .

所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增.

再证“必要性”.

假设存在 $k \in N^*$ 使得 $a_k$ 为偶数, 则 $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} < a_h$ , 与数列 $\{a_n\}$ 单调递增矛盾,

因此数列 $\{a_n\}$ 中的所有项都是奇数.

此时, 则 $a_{n+1} = a_n + m$ , 即 $m = a_{n+1} - a_n$ , 所以 $m$ 为偶数.....8 分

(III) 存在 $n > 1$ , 满足 $a_n = 1$ , 理由如下:

因为 $a_1 = 1, m$ 为奇数, 所以 $a_2 = 1 + m \leq 2m$ 且 $a_2$ 为偶数,  $a_3 = \frac{1+m}{2} \leq m$ .

假设 $a_k$ 为奇数时,  $a_k \leq m$ ,  $a_k$ 为偶数时 $a_k \leq 2m$ .

当 $a_k$ 为奇数时,  $a_{k+1} = a_k + m \leq 2m$ . 且 $a_{k+1}$ 为偶数;

当 $a_k$ 为偶数时,  $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} \leq m$ .

所以 $a_{k+1}$ 为奇数, 则 $a_{k+1} \leq m$ ; 若 $a_{k+1}$ 为偶数, 则 $a_{k+1} \leq 2m$ .

因此对 $\forall n \in N^*$ 都有 $a_n \leq 2m$ .

所以正整数数列 $\{a_n\}$ 中的项的不同取值只有有限个, 所以其中必有相等的项. 设集合 $A = \{(r, s) | a_r = a_s, r < s\}$ , 设集合 $B = \{r \in N^* | (r, s) \in A\} \subseteq N^*$ .

因为 $A \neq \emptyset$ 所以 $B \neq \emptyset$ .

令 $r_1$ 是 $B$ 中的最小元素, 下面证 $r_1 = 1$ .

设 $r_1 > 1$ 且 $a_{r_1} = a_{s_1} (r_1 < s_1)$ .

当 $a_{r_1} \leq m$ 时,  $a_{r_1-1} = 2a_{r_1}, a_{s_1-1} = 2a_{s_1}$ , 所以 $a_{r_1-1} = a_{s_1-1}$

当 $a_{r_1} > m$ 时,  $a_{r_1-1} = a_{r_1} - m, a_{s_1-1} = a_{s_1} - m$ , 所以 $a_{r_1-1} = a_{s_1-1}$ .

所以若 $r_1 > 1$ , 则 $r_1 - 1 \in B$ 且 $r_1 - 1 < r_1$ 与 $r_1$ 是 $B$ 中的最小元素矛盾.

所以 $r_1 = 1$ , 且存在 $1 < s_1 \in N^*$ 满足 $a_{s_1} = a_1 = 1$ , 即存在 $n > 1$ , 满足 $a_n = 1$  .....13 分