

2021 北京东城高三（上）期末

数 学

2021.1

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $\{0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{1, 2\}$

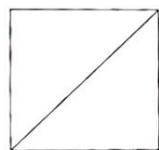
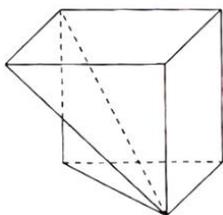
(2) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， S_n 为其前 n 项和。若 $S_3 = 3a_1 + 3$ ，则 $d =$

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

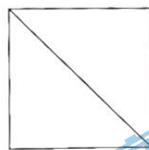
(3) 下列函数中，既是奇函数，又在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是

- (A) $y = 2^{-x}$ (B) $y = \ln x$ (C) $y = \frac{1}{x}$ (D) $y = \sin x$

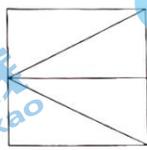
(4) 将正方体去掉一个四棱锥，得到的几何体如图所示，该几何体的侧（左）视图为



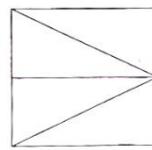
(A)



(B)



(C)

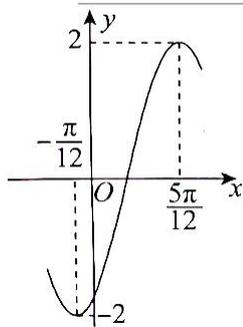


(D)

(5) 与圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ 相切与点 $(2, 2)$ 的直线的斜率为

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

(6) 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega < 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则 $f(\pi) =$



- (A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$

(7) 设 \mathbf{a} , \mathbf{b} 是两个不共线向量, 则“ \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为锐角”是“ $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 十二生肖, 又叫属相, 依次为鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪. 现有十二生肖的吉祥物各一个, 甲、乙、丙三名同学从中各选一个, 甲、乙、丙三人恰有一人选择羊, 则不同的选法有

- (A) 242 种 (B) 220 种 (C) 200 种 (D) 110 种

(9) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2, 过焦点 F 的直线与抛物线交于 A 、 B 两点, 且 $|AF| = 3|FB|$, 则点 A 到 y 轴的距离为

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

(10) 某公园门票单价 30 元, 相关优惠政策如下:

- ① 10 人 (含) 以上团体购票 9 折优惠;
- ② 50 人 (含) 以上团体购票 8 折优惠;
- ③ 100 人 (含) 以上团体购票 7 折优惠;
- ④ 购票总额每满 500 元减 100 元 (单张票价不优惠).

现购买 47 张门票, 合理地设计购票方案, 则门票费用最少为

- (A) 1090 元 (B) 1171 元 (C) 1200 元 (D) 1210 元

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 复数 $\frac{3+4i}{i} =$ _____.

(12) 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln x$ 的定义域是 _____.

(13) 已知 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$, $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\cos \theta =$ _____, $\cos 2\theta =$ _____.

(14) 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, $\triangle ABC$ 为等边三角形. 若点 A 在 y 轴上, 点 B, C 在双曲线 M 上,

且双曲线 M 的实轴为 $\triangle ABC$ 的中位线，则双曲线 M 的离心率为_____.

(15) 已知函数 $f(x) = 2^{\lfloor \sin x \rfloor} + 3^{\lfloor \cos x \rfloor}$, $x \in [0, 2\pi]$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

例如: $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$, $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$.

① $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ _____.

②若 $f(x) > x + a$ 对任意 $x \in [0, 2\pi]$ 都成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

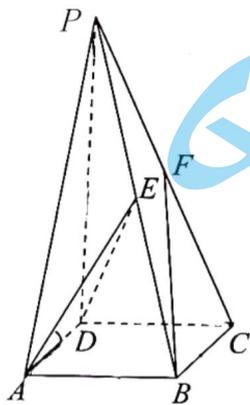
二、解答题共 8 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 13 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=4$, 地面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, E, F 分别为 PB, PC 的中点.

(I) 求证: 平面 $ADE \perp$ 平面 PCD

(II) 求直线 BF 与平面 ADE 所成角的正弦值.



(17) (本小题 13 分)

已知函数 $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = \cos x$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(I) $f(x)$ 的最小正周期;

(II) $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的最大值.

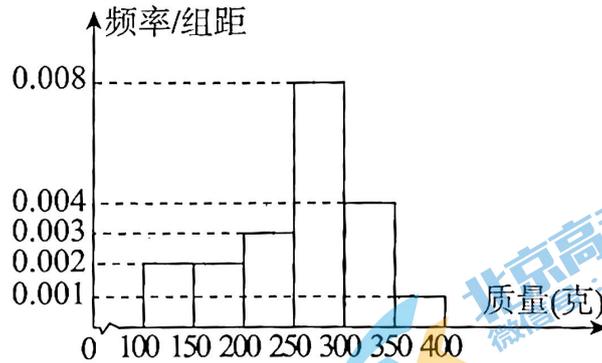
条件①: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$;

条件②: $f(x) = g(x) + h(x)$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 14 分)

为了解果园某种水果产量情况，随机抽取 100 个水果测量质量，样本数据分组为 $[100,150)$ ， $[150,200)$ ， $[200,250)$ ， $[250,300)$ ， $[300,350)$ ， $[350,400)$ (单位：克)，其频率分布直方图如图所示：



(I) 用分层抽样的方法从样本里质量在 $[250,300)$ ， $[300,350)$ 的水果中抽取 6 个，求质量在 $[250,300)$ 的水果数量；

(II) 从 (I) 中得到的 6 个水果中随机抽取 3 个，记 X 为质量在 $[300,350)$ 的水果数量，求 X 得分布列和数学期望；

(III) 果园现有该种水果约 20000 个，其等级规格及销售价格如下表所示，

质量 m (单位：克)	$m < 200$	$200 \leq m < 300$	$m \geq 300$
等级规格	二等	一等	特等
价格 (元/个)	4	7	10

试估计果园该种水果的销售收入.

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ，且离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 设直线 l 与椭圆 C 有且仅有一个公共点 E ，且与 x 轴交于点 G (E, G 不重合)， $ET \perp x$ 轴，垂足为 T .

求证： $\frac{|TA|}{|TB|} = \frac{|GA|}{|GB|}$.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = 1 - \frac{ax^2}{e^x}$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于直线 $y=x$, 求该切线方程;

(II) 若 $a=1$, 求证: 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$;

(III) 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 求 a 的值.

(21) (本小题 15 分)

给定正整数 $m, t (m \leq t)$, 若数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足: $a_i \in \{0, 1\}, a_i = a_{i+t}, a_1 + a_2 + \dots + a_t = m$, 则称数列 A 具有性质 $E(t, m)$.

对于两个数列 $B: b_1, b_2, \dots, b_n, \dots; C: c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$,

定义数列 $B+C: b_1+c_1, b_2+c_2, \dots, b_n+c_n, \dots$.

(I) 设数列 A 具有性质 $E(4, 2)$, 数列 B 的通项公式为 $b_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $A+B$ 的前四项和;

(II) 设数列 $A_i (i \in \mathbb{N}^*)$ 具有性质 $E(4, m)$, 数列 B 满足 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 4$ 且 $b_j = b_{j+4} (j \in \mathbb{N}^*)$. 若存在一组数列 A_1, A_2, \dots, A_k , 使得 $A_1 + A_2 + \dots + A_k + B$ 为常数列, 求出 m 所有可能的值;

(III) 设数列 $A_i (i \in \mathbb{N}^*)$ 具有性质 $E(t, t-1)$ (常数 $t \geq 2$), 数列 B 满足 $b_1 = 1, b_2 = 2, \dots, b_t = t$ 且 $b_j = b_{j+t} (j \in \mathbb{N}^*)$. 若存在一组数列 A_1, A_2, \dots, A_k , 使得 $A_1 + A_2 + \dots + A_k + B$ 为常数列, 求 k 的最小值. (只需写出结论)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯