

北京市第二十中学 2020-2021 学年第二学期期末考试试卷

高二 数学

(时间: 120 分钟 满分: 150 分 为 选择性必修二、选择性必修三 模块结业考试)

命题人: 刘颖

审题人: 王瑞群

班级 _____ 姓名 _____

一、选择题: 本大题共10小题, 每小题4分, 共40分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $M = (-3, 5]$, $N = [5, +\infty)$, 则 $M \cup N =$

- A. $(-3, +\infty)$ B. $\{5\}$ C. $(-3, 5)$ D. $[5, +\infty)$

2. 命题“ $\forall x \in (0, +\infty), e^x \leq x+1$ ”的否定是

- A. $\exists x \in (0, +\infty), e^x \leq x+1$ B. $\forall x \in (0, +\infty), e^x > x+1$
C. $\exists x \in (0, +\infty), e^x > x+1$ D. $\exists x \notin (0, +\infty), e^x > x+1$

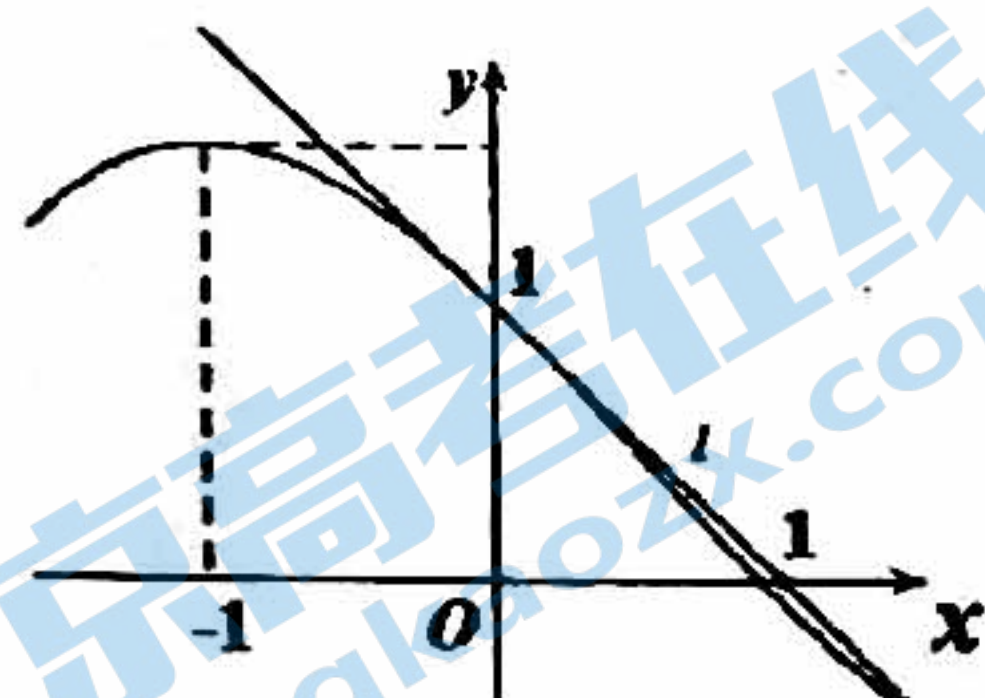
3. 已知 $-1 < a < 0$, $b < 0$, 则 b , ab , a^2b 的大小关系是

- A. $b < ab < a^2b$ B. $a^2b < ab < b$ C. $a^2b < b < ab$ D. $b < a^2b < ab$

4. 函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线 l 经过点 $(1, 0)$, 如右图所示, 则

$f'(0) + f'(-1) =$

- A. 0 B. -1
C. 1 D. 2



5. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = |a_n|$, 则“数列 $\{a_n\}$ 为等比数列”是“数列 $\{b_n\}$ 为等比数列”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 中国古典乐器一般按“八音”分类. 这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法, 最先见于《周礼·春官·大司马》, 分为“金、石、土、革、丝、木、匏 (páo)、竹”八音, 其“金、石、木、革”为打击乐器, “土、匏、竹”为吹奏乐器, “丝”为弹拨乐器. 现从“八音”中任取不同的“两音”, 则含有打击乐器的概率为

- A. $\frac{3}{14}$ B. $\frac{11}{14}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{2}{7}$

7. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差 $d < 0$ ，前 n 项和为 S_n ，若 a_1, a_4, a_8 成等比数列，则

- A. $a_1 > 0, S_4 > 0$ B. $a_1 < 0, S_4 < 0$
C. $a_1 > 0, S_4 < 0$ D. $a_1 < 0, S_4 > 0$

8. 函数 $f(x) = x^3 + kx^2 - 7x$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增，则实数 k 的取值范围是

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[-2, 2]$ D. $[2, +\infty)$

9. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成，前 n 项和为 S_n ，若对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \in \{2, 3\}$ ，则 k 的最大值是

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a & (x \leq 1) \\ x - a \ln x & (x > 1) \end{cases}$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, e]$ D. $[1, e]$

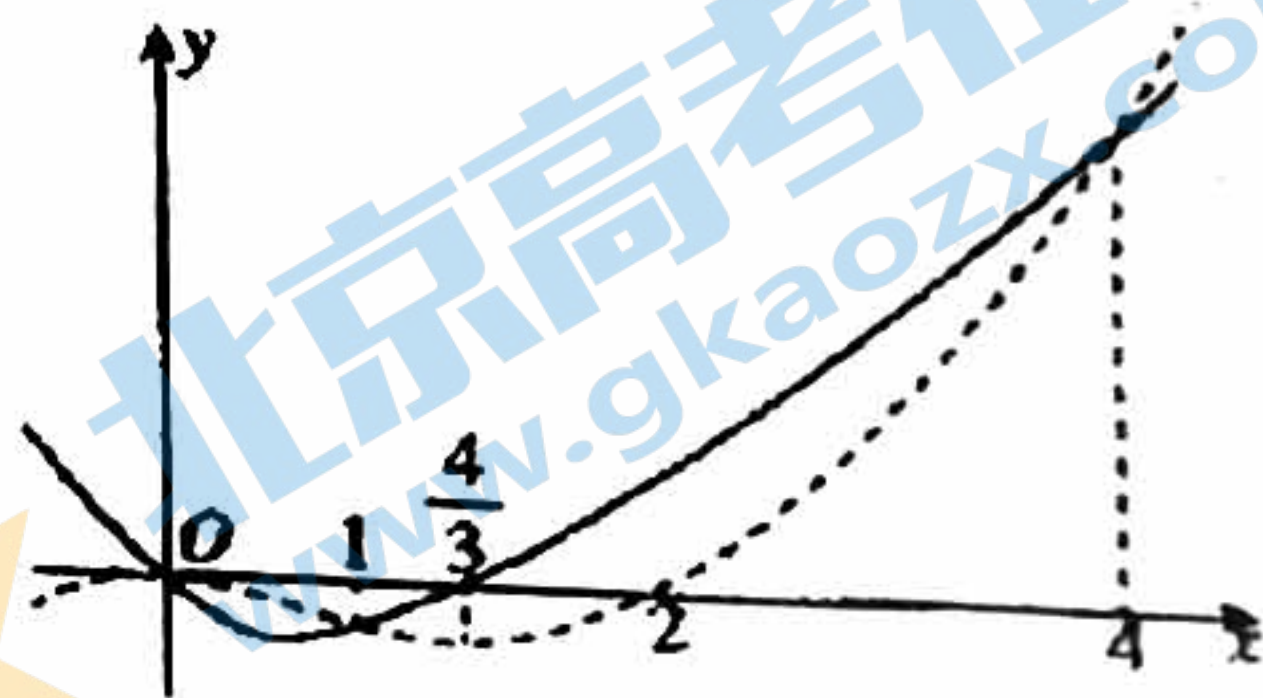
二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

11. 已知 $f(x) = \cos x \cdot e^x$ ，则 $f'(0) =$ _____.

12. 设 $(3x^2 - x)^n$ 展开式的二项式系数和为32，则含 x^6 的系数是 _____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足① $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{k+1} > a_k$ ，② $\forall k \in \mathbb{N}^*, |a_{k+1} - a_k| \leq 2$ ，请写出一个满足条件的数列的通项公式 _____。（答案不唯一）

14. 函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图像如右图所示，则 $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ 的递增区间是 _____.



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 7}{a_n}, n \in \mathbb{N}^*$ ，下列说法正确的是 _____.

- ① $a_4 = 9$;
② $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n$ 都是正整数;
③ a_{2k-1}, a

北京市第二十中学2020-2021学年第二学期期末考试试卷

高二 数学

班级_____姓名_____

三、解答题：本大题共6小题，共85分。

16. (本小题满分14分)

设数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $a_3=8$ ， $a_4+a_5=48$ ，

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=a_n+n-1$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

17. (本小题满分14分)

2021年6月18时48分，我国航天员聂海胜、刘伯明、汤洪波先后进入天和核心舱，这标志着中国人首次进入自己的空间站，后续还会有更多航天员进入天和核心舱开展研究工作。

我国的航天员一般是从空军歼击机或强击机在飞的合格飞行员当中挑选的。某校甲、乙、丙三位同学立志投身祖国的航天事业，于是报考了空军飞行员，选空军飞行员可以说是“万里挑一”，要想通过需要五关：目测、初检、复检、文考（文化考试）、政审，若某校甲、乙、丙三位同学都顺利通过了前两关，根据分析甲、乙、丙三位同学通过复检关的概率分别是0.5，0.6，0.75，能通过文考关的概率分别是0.6，0.5，0.4，由于他们平时表现较好，都能通过政审关。若后三关之间通过与否没有影响。

(I) 求甲被录取成为空军飞行员的概率；

(II) 设只要通过后三关就可以被录取，求录取人数 X 的分布列及期望。

18. (本小题满分14分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$ 。

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(II) 求证： $f(x)<x^2+x$ 。

19. (本小题满分14分)

单板滑雪U型池比赛是冬奥会比赛中的一个项目，进入决赛阶段的12名运动员按照预赛成绩由低到高的出场顺序轮流进行三次滑行，裁判员根据运动员的腾空高度、完成的动作难度和效果进行

评分，最终取单次最高分作为比赛成绩。现有运动员甲、乙二人在2021赛季单板滑雪U型池世界杯分站比赛成绩如下表：

分站	运动员甲的三次滑行成绩			运动员乙的三次滑行成绩		
	第1次	第2次	第3次	第1次	第2次	第3次
第1站	80.20	86.20	84.03	80.11	88.40	0
第2站	92.80	82.13	86.31	79.32	81.22	88.60
第3站	79.10	0	87.50	89.10	75.36	87.10
第4站	84.02	89.50	86.71	75.13	88.20	81.01
第5站	80.02	79.36	86.00	85.40	87.04	87.70

假设甲、乙二人每次比赛成绩相互独立。

- (I) 从上表5站中随机选取1站，求在该站运动员甲的成绩高于运动员乙的成绩的概率；
- (II) 从上表5站中任意选取2站，用 X 表示这2站中甲的成绩高于乙的成绩的站数，求 X 的分布列和数学期望；
- (III) 假如从甲、乙2人中推荐1人参加2022年北京冬奥会单板滑雪U型池比赛，根据以上数据信息，你推荐谁参加，并说明理由。

(注：方差 $s^2 = \frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \right]$ ，其中 $\bar{x}$ 为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数)

20. (本小题满分14分)

设函数 $f(x) = e^x - ax - 2$

- (I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- (II) 若 $a = 1$ ， k 为整数，且当 $x > 0$ 时， $(x - k)f'(x) + x + 1 > 0$ ，求 k 的最大值。

21. (本小题满分15分)

设 n 是正整数，对每一个满足 $0 \leq a_i \leq n (i = 1, 2, \dots, n)$ 的整数数列 $A: 0, a_1, \dots, a_n$ ，定义变换 T ： T 将数列 A 变换成数列 $T(A): 0, T(a_1), T(a_2), \dots, T(a_n)$ ，其中 $T(a_i)$ 为数列 A 位于 a_i 之前的与 a_i 不相等的项的个数 ($i = 1, 2, \dots, n$)，令 $A_{k+1} = T(A_k) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。

- (I) 已知数列 A_0 分别为 $0, 1, 2, 3$ 和 $0, 0, 2, 0, 1, 3$ ，请写出对应的数列 A_1, A_2, A_3 ；
- (II) 数列 $B: 0, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $b_{i-1} \leq b_i$ ，且 $b_i = i$ 或 $b_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ ，求证： $T(B) = B$ ；
- (III) 求证：对任意满足已知条件的数列 A_0 ，当 $k \geq n$ 时， $A_k = T(A_k)$ 。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯