

北京市第三十五中学 2023-2024 学年第一学期 期中测试

高一数学 2023.11

行政班_____ 教学班_____ 姓名_____ 学号_____

试卷说明：试卷分值 150 分，考试时间 120 分钟，I 卷为选择题，包括第 1 至第 10 题，II 卷为主观题，包括第 11 至第 22 题。

I 卷

一、选择题（共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。每小题只有一个正确选项，请选择正确答案填在答题卡相应的题号处）

1. 设集合 $M = \{0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $N = \{2, 3\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $\{0, 1, 2, 3\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{0\}$ D. $\{2, 3\}$

2. 已知命题 $p: \forall x \in R, x \geq 1$ ，那么命题 p 的否定是

- A. $\forall x \in R, x < 1$ B. $\forall x \notin R, x < 1$ C. $\exists x \in R, x < 1$ D. $\exists x \in R, x \leq 1$

3. 设 $a, b, c \in R, a > b$ ，则下列不等式中一定正确的是

- A. $2a > b$ B. $ac^2 > bc^2$ C. $a - c > b - c$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

4. 下列函数中，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^2 - 2x$ C. $y = 1 - x$ D. $y = |x| - 1$

5. 不等式 $ax^2 + bx + 3 < 0$ 的解集是 $(1, 3)$ ，则 $a + b$ 的值是

- A. -3 B. 3 C. -5 D. 5

6. 若函数 $f(x)$ 是偶函数，且在区间 $[0, 3]$ 上单调递减，则

- A. $f(3) > f(-1) > f(2)$ B. $f(-1) > f(2) > f(3)$
C. $f(2) > f(-1) > f(3)$ D. $f(3) > f(2) > f(-1)$

7. 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \sqrt{x}$ 在以下哪个区间内一定存在零点

- A. $(-1, 0)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

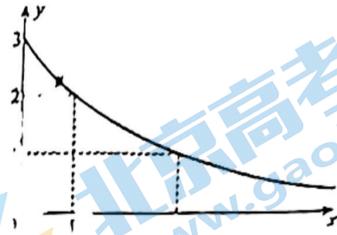
8. 已知 $a, b \in R$ ，则 $a^2 + b^2 \leq 2$ 是 “ $-1 \leq ab \leq 1$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 当 $(0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 的图象如图

所示, 那么满足不等式 $f(x) \geq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 的 x 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2] \cup (0, 1]$ B. $[-2, 0) \cup (0, 1]$
C. $(-\infty, -3] \cup (0, 1]$ D. $[-3, 0) \cup (0, 1]$



10. 黎曼函数 $R(x)$ 是由德国数学家黎曼发现并提出的, 它是一个无法用图象表示的特殊

函数, 此函数在高等数学中有着广泛应用. $R(x)$ 在 $[0, 1]$ 的定义为: 当 $x = \frac{q}{p}$ ($p > q$, 且 p, q 为互质的正整数) 时, $R(x) = \frac{1}{p}$; 当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 或 x 为 $(0, 1)$ 内的无理数时, $R(x) = 0$,

下列说法错误的是

(注: p, q 为互质的正整数 ($p > q$), 即 $\frac{q}{p}$ 为已约分的最简真分数)

A. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $R(R(x)) = R(x)$

B. 若 $a, b \in [0, 1]$, 则 $R(a \cdot b) \geq R(a) \cdot R(b)$

C. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $R(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称

D. 存在大于 1 的实数 m , 使方程 $R(x) = \frac{m}{m+1}$ ($x \in [0, 1]$) 有实根

二. 填空题 (共 6 个小题, 每题 5 分, 共 30 分. 请将正确答案填在答题卡相应的题号处)

11. 函数 $f(x) = \sqrt{4x+1}$ 的定义域为_____.

12. 已知正数 a, b 满足 $3a+2b=1$, 则 ab 的最大值是_____.

13. 不等式 $\frac{1}{|x-1|} > \frac{3}{2}$ 的解集为_____.

14. 能够说明“若 a, b, m 均为正数, 则 $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$ ”是假命题的一组整数 a, b 的值是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq t, \\ x, & 0 < x < t \end{cases} (t > 0)$

(1) 当 $t=1$ 时 $f(x)$ 的值域是_____.

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 t 的取值范围是_____.

16. 设函数 $f(x) = -ax + 1$, $g(x) = x^2$, 且函数 $f(x), g(x)$ 定义域均为 $[2, +\infty)$, 记: ①

$$f(x) + g(x) > 0 \text{ ② } f(x) - g(x) > 0 \text{ ③ } f(x) \cdot g(x) > 0 \text{ ④ } \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

(1) 若 $f(x), g(x)$ 满足条件④, 则 a 的取值范围为_____;

(2) 若 $f(x), g(x)$ 恰满足条件①、条件②、条件③、条件④的一个, 则 a 的取值范围为_____.

II 卷

三. 解答题 (共 6 个小题, 共 80 分. 请将解题过程和答案写在答题卡相应的题号处)

17. (本小题 12 分)

$$\text{已知集合 } A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x+1} > 0 \right\}, \quad B = \{ x \mid x \leq 4 \}$$

(I) 求集合 A ;

(II) 已知 $U = \mathbb{R}$, 求 $A \cap B, (\complement_U A) \cup B$.

18. (本小题 12 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = x + \frac{4}{x}.$$

(I) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

(II) 用单调性的定义证明: 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增.

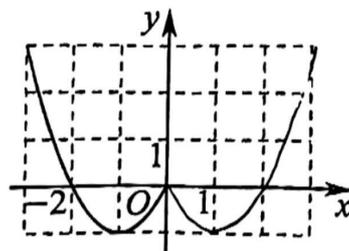
19. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$;

(I) 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 请根据条件将图象补充完整, 并写出函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = t$ 有 2 个不相等的实数根, 求实数 t 的取值范围. (只需写出结论)



20. (本小题 16 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - (2a+1)x + 2, a \in R$.

(I) 当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的零点;

(II) 当 $a=1$ 时, 若 $x \in [1, 3]$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有解, 求实数 m 的取值范围;

(III) 当 $a > 0$ 时, 求关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集.

21. (本小题 12 分)

近年来, 某企业每年消耗电费约 24 万元. 为了节能减排, 决定安装一个可使用 15 年的太阳能供电设备接入本企业电网. 安装这种供电设备的工本费 (万元) 与太阳能电池板的面积 (平方米) 成正比, 比例系数约为 0.5. 为了保证正常用电, 安装后采用太阳能和电能互补供电的模式, 假设在此模式下, 安装后该企业每年消耗的电费 C (万元) 与安装的这种太阳能电池板的面积 x (平方米) 之间的函数关系是 $C(x) = \frac{k}{20x+100}$

($x \geq 0, k$ 为常数). 记 F 为企业安装这种太阳能供电设备的费用与该企业 15 年消耗的总电费之和.

(I) 试解释 $C(0)$ 的实际意义, 并建立 F 关于 x 的函数关系式;

(II) 当 x 为多少平方米时, F 取得最小值? 最小值是多少万元?

22. (本小题 16 分)

设 k 是正整数, 集合 A 至少有两个元素, 且 $A \subseteq \mathbf{N}^*$. 如果对于 A 中的任意两个不同的元素 x, y 都有 $|x-y| \neq k$, 则称具有性质 $P(k)$.

(I) 试判断集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 和 $C = \{1, 4, 7, 10\}$ 是否具有性质 $P(2)$? 并说明理由;

(II) 若集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, 20\}$, 求证: A 不可能具有性质 $P(3)$;

(III) 若集合 $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2023\}$, 且同时具有性质 $P(4)$ 和 $P(7)$, 求集合 A 中元素个数的最大值.

北京市第三十五中学 2023-2024 学年第一学期 期中测试

高一数学评分标准

I 卷

一. 选择题 (共 10 个小题, 每题 4 分, 共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	C	D	A	B	D	A	C	D

II 卷

二. 选择题 (共 6 个小题, 每题 5 分, 共 30 分)

11. $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

12. $\frac{1}{24}$

13. $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{5}{3} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$

14. 1,2(答案不唯一)

15. $(0, +\infty); [1, +\infty)$

16. $(-\infty, 0]; (0, \frac{5}{2})$

三. 解答题 (共 6 个小题, 共 80 分)

17. (本小题 12 分)

解: (I) 因为 $\frac{x-3}{x+1} > 0$ 可化为 $(x-3)(x+1) > 0$,1 分解得 $x > 3$ 或 $x < -1$,4 分所以 $A = \{x \mid x > 3 \text{ 或 } x < -1\}$5 分(II) $A \cap B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } 3 < x \leq 4\}$8 分由 A 得 $\complement_U A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$,9 分则 $(\complement_U A) \cup B = \{x \mid x \leq 4\}$12 分

18. (本小题 12 分)

解: (I) 因为函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 且关于原点对称.2 分

$$\text{因为 } f(-x) = -x - \frac{4}{x} = -f(x), \text{4 分}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.5 分

(II) 任取 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, 且 $x_2 > x_1$, 则6 分

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2 + \frac{4}{x_2} - x_1 - \frac{4}{x_1} \\ &= (x_2 - x_1) + \frac{4x_1 - 4x_2}{x_1x_2} \\ &= (x_2 - x_1) \frac{(x_1x_2 - 4)}{x_1x_2}. \text{9 分} \end{aligned}$$

因为 $x_2 > x_1 \geq 2$,

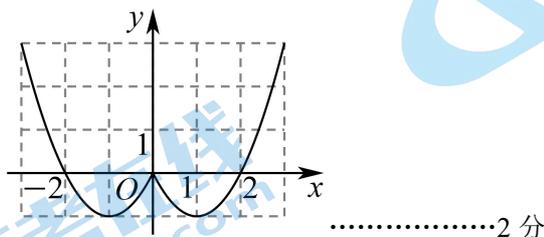
所以 $x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 - 4 > 0, x_1x_2 > 0$.

所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$11 分

所以 $y = f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数.12 分

19. (本小题 12 分)

解: (I) 因为函数是偶函数, 所以函数图象关于 y 轴对称, 如图所示,



函数的单调递增区间: $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty)$4 分

(II) 设 $x > 0, -x < 0$,

因为函数是偶函数, 所以

$$f(x) = f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{所以函数的解析式是 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, x \leq 0 \\ x^2 - 2x, x > 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

(III) 若方程 $f(x) = t$ 有三个不相等的实数根, 即 $y = t$ 与 $y = f(x)$ 有 2 个交点,

有图象可知, $t > 0$ 或 $t = -1$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

20. (本小题 16 分)

解: (I) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x + 2$. $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

令 $f(x) = 0$ 得 $x = 2$. $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以函数的零点为 2. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

(II) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

若 $x \in [1, 3]$ 时, 方程 $f(x) = m$ 有解,

即 $y = f(x)$ 与 $y = m$ 在 $[1, 3]$ 有交点.

因为 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 开口向上, 对称轴为 $x = \frac{3}{2}$,

$f(x)$ 在 $[1, \frac{3}{2}]$ 单调递减, 在 $[\frac{3}{2}, 3]$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的值域为 $[-\frac{1}{4}, 2]$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

所以 $m \in [-\frac{1}{4}, 2]$. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

(III) $ax^2 - (2a+1)x + 2 > 0$

可化为 $(ax-1)(x-2) > 0$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

因为 $a > 0$, 则方程 $(ax-1)(x-2) = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = 2$.

① 当 $\frac{1}{a} > 2$ 时, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,

不等式解集为 $(-\infty, 2) \cup (\frac{1}{a}, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

② 当 $\frac{1}{a} = 2$ 时, 即 $\frac{1}{a} = 2$ 时,

不等式解集为 $\{x | x \neq 2\}$. $\dots\dots\dots 14 \text{分}$

③当 $\frac{1}{a} < 2$ 时, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时,

不等式解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (2, +\infty)$. ……………16 分

综上所述, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$,

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $\{x | x \neq 2\}$,

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (2, +\infty)$.

21. (本小题 12 分)

解: (I) $C(0)$ 的实际意义是安装这种太阳能电池板的面积为 0 时的用电费用, 即未安装太阳能供电设备时该企业每年消耗的电费, ……………2 分

由 $C(0) = \frac{k}{100} = 24$, 得 $k = 2400$, ……………3 分

则 $F = 15 \times \frac{2400}{20x+100} + 0.5x = \frac{1800}{x+5} + 0.5x$, $x \geq 0$. ……………7 分

(II) 因为 $F = \frac{1800}{x+5} + 0.5(x+5) - 2.5 \geq 2\sqrt{1800 \times 0.5} - 2.5 = 57.5$, ……………10 分

当且仅当 $\frac{1800}{x+5} = 0.5(x+5)$, 即 $x = 55$ 时取等号,

即当 x 为 55 平方米时, F 取得最小值为 57.5 万元. ……………12 分

22. (本小题 16 分)

解: (I) 因为 $|4-2|=2$, 所以 B 不具有性质 $p(2)$, ……………1 分

因为 $|4-1|=|7-4|=|10-7|=3 \neq 2$,

$|7-1|=|10-4|=6$, $|10-1|=9$, 所以集合 C 具有性质 $P(2)$. ……………3 分

(II) 将集合 $\{1, 2, \dots, 20\}$ 中的元素分为如下 11 个集合,

$\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 6\}$, $\{7, 10\}$, $\{8, 11\}$, $\{9, 12\}$, $\{13, 16\}$, $\{14, 17\}$, $\{15, 18\}$,
 $\{19\}$, $\{20\}$.

所以从集合 $\{1, 2, \dots, 20\}$ 中选取 12 个元素, 需从前 9 个子集中至少选 10 个元素, 则必有两个元素是同一个子集中的元素, 即存在两个元素的差为 3,

所以 A 集合不可能具有性质 $P(3)$. ……………8 分

(III) 先考虑连续 11 个整数中, 集合 A 最多选取多少个,

设这 11 个数为 1, 2, 3, 4, ..., 11,

将这 11 个数分为: $\{1,8\}$, $\{2,9\}$, $\{3,10\}$, $\{4,11\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$,

①若 5, 6, 7 一个都不选, 则 A 集合最多可选 4 个元素, 如 1, 2, 3, 4.

②若 5, 6, 7 都选, 因为集合 A 具有性质 $P(4)$ 和 $P(7)$.

所以有 5 则没有 1, 9; 有 6, 则没有 2, 10; 有 7 则没有 3, 11,

所以只剩 4, 8, 但是 4 和 8 也不能同时存在,

所以 A 中最多有 4 个元素, 如 4, 5, 6, 7.

③若 5, 6, 7 选两个,

i) 若选 5, 6, 则没有 1, 2, 9, 10, 只剩 3, 4, 8, 11,

但是 4, 11 不共存; 4, 8 不共存, 所以最多选 5 个, 如 3, 5, 6, 8, 11;

ii) 若选 5, 7, 则没有 1, 9, 3, 11, 只剩 2, 4, 8, 10,

但是 4, 8 不能共存, 所以最多选 5 个, 如 2, 4, 5, 7, 10;

iii) 若选 6, 7, 则没有 2, 3, 10, 11, 只剩 1, 4, 8, 9,

但是 4, 8 不能共存, 所以最多可选 5 个, 如 1, 4, 6, 7, 9;

④若 5, 6, 7 中只选 1 个,

因为 $\{1,8\}$, $\{2,9\}$, $\{3,10\}$, $\{4,11\}$ 每个集合最多选 1 个元素

所以这 11 个数中属于 A 的元素个数不超过 5 个.

由以上分析知, 连续 11 个整数中属于集合 A 的元素最多为 5

个.12 分

因为 $2023 = 11 \times 183 + 10$, 所以把每 11 个连续自然数分组, 前 183 组每组最多选 5 个数, 剩下 10 个数, 最多选 5 项.

所以集合 A 的元素最多有 $184 \times 5 = 920$ 个.14 分

比如构造如下选取方法: 1, 4, 6, 7, 9; 12, 15, 17, 18, 20;

往后在每个数上依次加 11, 最后 5 个数为 2014, 2017, 2019, 2020, 2022.

所以集合 A 最多有 920 个数.16 分



北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

