昌平区 2022—2023 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数　学　试　卷

2023. 1

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$B=\{x|x>0\}$，则集合 $A\cap B=$

（A）$(-\infty,2)$　（B）$[-1,+\infty)$　（C）$(0,2)$　（D）$[-1,2)$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(a,1)$，且满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，则 $a=$

（A）1　（B）-1　（C）2　（D）-2

（3）下列函数中，是奇函数且在定义域内是减函数的是

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　（B）$y=-x^3$　（C）$y=x|x|$　（D）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

（4）若 $a<b<0$，$c>d>0$，则一定有

（A）$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　（B）$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$　（C）$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　（D）$\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

（5）已知二项式 $(x+\dfrac{a}{x})^5$ 的展开式中 $\dfrac{1}{x}$ 的系数是 10，则实数 $a=$

（A）-1　（B）1　（C）-2　（D）2

（6）若 $\sin(\pi-\alpha)=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha>0$，则 $\tan\alpha=$

（A）$\dfrac{3}{4}$　（B）$-\dfrac{3}{4}$　（C）$\dfrac{4}{3}$　（D）$-\dfrac{4}{3}$

（7）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，则“角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（8）图 1：在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木钉，小木钉之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃．将小球从顶端放入，小球下落的过程中，每次碰到小木钉后都等可能的向左或向右落下，最后落入底部的格子中．在图 2 中，将小球放入容器中从顶部下落，则小球落入 D 区的路线数有

（A）16　　（B）18　　（C）20　　（D）22

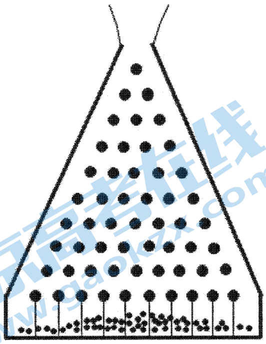


图 1

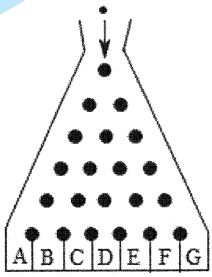


图 2

（9）设抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，准线为 l．斜率为$\sqrt{3}$的直线经过焦点 F，交抛物线 C 于点 A，交准线 l 于点 B（A，B 在 x 轴的两侧）．若 $|AB|=6$，则抛物线的方程为

（A）$y^2=2x$　　（B）$y^2=3x$　　（C）$y^2=4x$　　（D）$y^2=6x$

（10）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是

（A）$\sqrt{2}-1$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　（D）$\sqrt{2}+1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}-2a_n=0\,(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

（12）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，则该双曲线的渐近线方程为________；若 $|PF_1|=4$，则 $|PF_2|=$________.

（13）在 $\triangle ABC$ 中，$a=8$，$c=7$，$\cos A=-\dfrac{1}{7}$，则 $b=$________，$\angle C=$________.

（14）若直线 $y=kx+2$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=a$ 有公共点，则 a 的最小值为________.

（15）已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 a，O 是底面 $\triangle ABC$ 的中心，用一个平行于底面的平面截三棱锥，分别交 PA，PB，PC 于 A_1，B_1，C_1 点（不与顶点 P，A，B，C 重合）.

给出下列四个结论：

①三棱锥 $O-A_1B_1C_1$ 为正三棱锥；

②三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$；

③三棱锥 $O-A_1B_1C_1$ 的体积既有最大值，又有最小值；

④当 $\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{2}{3}$ 时，$\dfrac{V_{O-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}}=\dfrac{4}{27}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x\,(0<\omega<2)$，再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\dfrac{\pi}{3},2)$；

条件②：函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象平移得到；

条件③：函数 $f(x)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 13 分）

不粘锅是家庭常用的厨房用具，近期，某市消费者权益保护委员会从市场上购买了 12 款不粘锅商品，并委托第三方检测机构进行检测．本次选取了食物接触材料安全项目中与消费者使用密切相关的 6 项性能项目进行比较试验，性能检测项目包含不粘性、耐磨性、耐碱性、手柄温度、温度均匀性和使用体验等 6 个指标．其中消费者最关注的两个指标“不沾性、耐磨性”检测结果的数据如下：

		检测结果	
序号	品牌名称	不粘性	耐磨性
1	品牌 1	Ⅰ级	Ⅰ级
2	品牌 2	Ⅱ级	Ⅰ级
3	品牌 3	Ⅰ级	Ⅰ级
4	品牌 4	Ⅱ级	Ⅱ级
5	品牌 5	Ⅰ级	Ⅰ级
6	品牌 6	Ⅱ级	Ⅰ级
7	品牌 7	Ⅰ级	Ⅰ级
8	品牌 8	Ⅰ级	Ⅰ级
9	品牌 9	Ⅱ级	Ⅱ级
10	品牌 10	Ⅱ级	Ⅱ级
11	品牌 11	Ⅱ级	Ⅱ级
12	品牌 12	Ⅱ级	Ⅱ级

（Ⅰ级代表性能优秀，Ⅱ级代表性能较好）

（Ⅰ）从这 12 个品牌的样本数据中随机选取两个品牌的数据，求这两个品牌的“不粘性”性能都是Ⅰ级的概率；

（Ⅱ）从前六个品牌中随机选取两个品牌的数据，设 X 为性能都是Ⅰ级的品牌个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）从后六个品牌中随机选取两个品牌的数据，设 Y 为性能都是Ⅰ级的品牌个数，比较随机变量 X 和随机变量 Y 的数学期望的大小（结论不要求证明）.

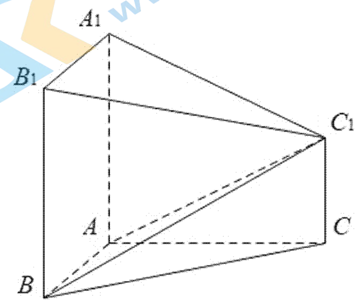
（18）（本小题 14 分）

如图，在多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 为矩形，$CA\perp$ 平面 ABB_1A_1，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AA_1=AC=4$，$CC_1=2$，$AB=3$.

（Ⅰ）求证：CC_1 // 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ）求直线 A_1C_1 与平面 ABC_1 所成角的正弦值；

（Ⅲ）求直线 A_1B_1 到平面 ABC_1 的距离.



（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(2,0)$，且离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和短轴长；

（Ⅱ）已知点 $P(1,0)$，直线 l 过点 $(0,3)$ 且与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B，问：是否存在直线 l，使得 $\triangle PAB$ 是以点 P 为顶点的等腰三角形，若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+m\mathrm{e}^{-x}+(m-1)x$，$m\leqslant 0$.

（Ⅰ）当 $m=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）当 $-\mathrm{e}\leqslant m<-1$ 时，证明：对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant -2$ 恒成立.

（21）（本小题 15 分）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1 \in \mathbf{N}^*$，$a_1 \leqslant 24$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n \leqslant 12, \\ 2a_n-24, & a_n>12\end{cases}$（$n=1,2,\cdots$）.

记集合 $M=\{a_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

（Ⅰ）若 $a_1=2$，写出集合 M 的所有元素；

（Ⅱ）若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数，证明：M 的所有元素都是 3 的倍数；

（Ⅲ）求集合 M 的元素个数的最大值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。