

数学高一（上）期末 2021~2022 试卷大兴 2022 . 1

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知 $a > 0$ ，则 $a \cdot \sqrt{a} =$ （ ）

A. $a^{\frac{1}{2}}$

B. $a^{\frac{3}{2}}$

C. a^2

D. a^3

2. 已知集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ ，则 （ ）

A. $-1 \in A$

B. $1 \in A$

C. $-\sqrt{2} \in A$

D. $2 \in A$

3. 下列函数中在定义域上为减函数的是 （ ）

A. $y = x$

B. $y = \lg x$

C. $y = 2^{-x}$

D. $y = x^3$

4. 当 $0 < x < 2$ 时， $x(2-x)$ 的最大值为 （ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

5. 化简 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta =$ （ ）

A. $2 \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$

B. $2 \sin(\theta - \frac{\pi}{3})$

C. $2 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

D. $2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$

6. “ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ” 是 “函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 为偶函数” 的 （ ）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x) = \frac{4}{x} - \log_2 x$ ，下列区间中包含 $f(x)$ 零点的区间是 （ ）

A. $(0, 1)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 4)$

D. $(4, 5)$

8. 在平面直角坐标系中，动点 M 在单位圆上按逆时针方向作匀速圆周运动，每 12 分钟转动一周。若 M 的

初始位置坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，则运动到 3 分钟时， M 的位置坐标是 （ ）

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

C. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

D. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

9. 下列不等关系中正确的是 （ ）

A. $\ln 2 + \ln 3 > 2 \ln \frac{5}{2}$

B. $\ln 3 - \ln 2 > \frac{1}{2}$

C. $\ln 2 \cdot \ln 3 < 1$

D. $\frac{\ln 3}{\ln 2} < \frac{3}{2}$

10. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1, \\ x(x-a), & x \geq 1 \end{cases}$ 恰有 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 1)$

B. $(0, 2)$

C. $(0, +\infty)$

D. $[1, 2)$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 函数 $y = \tan x$ 的最小正周期是_____。

12. 集合 $A = \{1, 2\}$ 的非空子集是_____。

13. 将函数 $y = \sin x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $y =$ _____ 的图象, 再把图象上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到函数 $y =$ _____ 的图象。

14. 能说明命题“如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应关系和值域都相同, 那么函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同一函数”为假命题的一组函数可以是 $f(x) =$ _____, $g(x) =$ _____。

15. 已知任何一个正实数都可以表示成 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10, n \in \mathbf{Z}$), 则 $\lg a$ 的取值范围是_____;
 2^{100} 的位数是_____。(参考数据 $\lg 2 \approx 0.3010$)

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题共 14 分) 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | 2^x < 4\}$ 。

(1) 求集合 $A \cup B$, $\complement_{\mathbf{R}} B$;

(2) 若关于 x 的不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $A \cap B$, 求 a, b 的值。

17. (本小题共 14 分) 已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

(1) 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 的值;

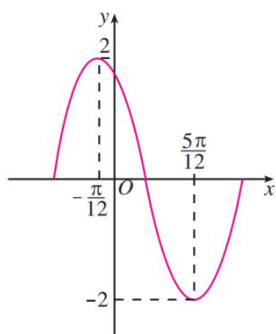
(2) 求 $\tan(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值.

18. (本小题共 14 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 直接写出 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的单调区间;

(3) 已知 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(a-x) = f(a+x)$ 都成立, 直接写出一个满足题意的 a 值.



19. (本小题共 14 分) 已知函数 $f(x) = \log_2(1-x^2)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;
- (3) 设 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 证明: $f(x_1) > f(x_2)$.

20. (本小题共 14 分) 已知函数 $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = A \cos^2 \omega x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 令函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求 $h(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值及取得最大值时 x 的值.

条件①: $A=1, \omega=2$; 条件②: $A=2, \omega=1$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

21. (本小题共 15 分) 用水清洗一堆蔬菜上的农药, 设用 x 个单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为 $f(x)$, 且 $f(0)=1$. 已知用 1 个单位量的水清洗一次, 可洗掉本次清洗前残留农药量的 $\frac{1}{2}$, 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上.

(1) 根据题意, 直接写出函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质;

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 现用 a ($a>0$) 个单位量的水可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次, 问用哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少, 说明理由;

(3) 若 $f(x)=\frac{k}{1+ce^{-rx}}$ 满足题意, 直接写出一组参数 k, c, r 的值.

2021~2022 大兴数学高一（上）期末参考答案及评分标准

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	B	D	A	C	A	C	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. π ;

12. $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$;

13. $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$; $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$

14. $f(x) = x^2, x \in (-1, 1)$;

$g(x) = x^2, x \in [0, 1)$ （答案不唯一）;

15. $[0, 1)$; 31

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

16.（共14分）

解：（1）因为 $B = \{x | 2^x \leq 4\}$,

所以 $B = \{x | x \leq 2\}$.

因为 $A = \{x | 1 < x < 3\}$,

所以 $A \cup B = \{x | x < 3\}$,

$\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x > 2\}$.

（2）因为 $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$.

所以 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$.

所以 $x^2 + ax + b = 0$ 的解为 1, 2.

所以 $\begin{cases} 1 + a + b = 0, \\ 4 + 2a + b = 0. \end{cases}$

解得 $a = -3, b = 2$.

17.（共14分）

解：（1） $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

因为 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 所以 $\cos \alpha > 0$.

所以 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

因为 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$,

所以 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$
 $= 2 \times (-\frac{3}{5}) \times \frac{4}{5}$
 $= -\frac{24}{25}$.

所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
 $= 1 - 2 \times (-\frac{3}{5})^2$
 $= \frac{7}{25}$.

(2) 由 (1) 知 $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$,

所以 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$
 $= -\frac{24}{25} \times \frac{25}{7}$
 $= -\frac{24}{7}$.

所以 $\tan(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\alpha \tan \frac{\pi}{4}}$
 $= \frac{-\frac{24}{7} + 1}{1 + \frac{24}{7}}$
 $= -\frac{17}{31}$.

18. (共 14 分)

解: (1) 如图可知, $\frac{T}{2} = \frac{5\pi}{12} - (-\frac{\pi}{12})$
 $= \frac{\pi}{2}$.

所以 $T = \pi$.

因为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$,

且 $\omega > 0$,

所以 $\omega = 2$.

因为图象过点 $(-\frac{\pi}{12}, 2)$,

所以 $2\sin(2 \times (-\frac{\pi}{12}) + \varphi) = 2$.

所以 $\sin(-\frac{\pi}{6} + \varphi) = 1$.

所以 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

所以 $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $0 < \varphi < \pi$,

所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{2\pi}{3})$.

(2) 在区间 $[0, \pi]$ 上, 函数 $f(x)$ 的

增区间为 $[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}]$,

减区间为 $[0, \frac{5\pi}{12}] \cdots \cdots 2$ 分, $[\frac{11\pi}{12}, \pi]$.

(III) $\frac{5\pi}{12}$. (注: 答案不唯一)

19. (共 14 分)

解: (1) 因为 $1 - x^2 > 0$,

即 $-1 < x < 1$,

所以函数 $f(x) = \log_2(1 - x^2)$ 的定义域是 $(-1, 1)$.

(2) 因为 $\forall x \in (-1, 1)$, 都有 $-x \in (-1, 1)$,

且 $f(-x) = \log_2(1 - (-x)^2) = \log_2(1 - x^2) = f(x)$,

所以函数 $f(x) = \log_2(1 - x^2)$ 为偶函数.

(III) 因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$,

所以 $0 < x_1^2 < x_2^2 < 1$.

所以 $-1 < -x_2^2 < -x_1^2 < 0$.

所以 $0 < 1 - x_2^2 < 1 - x_1^2 < 1$.

因为 $y = \log_2 x$ 是增函数,

所以 $\log_2(1 - x_1^2) > \log_2(1 - x_2^2)$.

因为 $f(x_1) = \log_2(1 - x_1^2)$, $f(x_2) = \log_2(1 - x_2^2)$,

所以 $f(x_1) > f(x_2)$.

20. (共 14 分)

解: (1) 函数 $y = \sin x$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$)

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

(2) 选择条件①: $A=1, \omega=2$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin 2x - \cos^2 2x \\ &= \sin 2x - (1 - \sin^2 2x) \\ &= \sin^2 2x + \sin 2x - 1 . \end{aligned}$$

$$\text{令 } u = \sin 2x ,$$

$$\text{因为 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] ,$$

$$\text{所以 } 2x \in [0, \pi] .$$

$$\text{所以 } u \in [0, 1] .$$

$$\text{所以 } y = u^2 + u - 1, \quad u \in [0, 1] .$$

因为 $y = u^2 + u - 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以当 $u=1$ 时, $y = u^2 + u - 1$ 取得最大值 1 .

所以当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $h(x)$ 取得最大值 1 .

选择条件②: $A=2, \omega=1$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin 2x - 2\cos^2 x \\ &= \sin 2x - \cos 2x - 1 \\ &= \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1 . \end{aligned}$$

$$\text{令 } u = 2x - \frac{\pi}{4} ,$$

$$\text{因为 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] ,$$

所以 $u \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

所以当 $u = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{3\pi}{8}$ 时, $h(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2} - 1$.

21. (共 15 分)

解: (1) $f(x)$ 满足的条件和性质如下: $f(0) = 1$;

定义域为 $[0, +\infty)$; $f(1) = \frac{1}{2}$; $0 < f(x) \leq 1$;

$f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 设清洗前残留的农药量为 t ,

若清洗一次, 设清洗后蔬菜上残留的农药量为 t' ,

则 $\frac{t'}{t} = f(a) = \frac{1}{1+a^2}$, 则 $t' = \frac{t}{1+a^2}$.

若把水平均分成 2 份后清洗两次,

设第一次清洗后蔬菜上残留的农药量为 t_1 ,

则 $\frac{t_1}{t} = f(\frac{a}{2}) = \frac{1}{1+(\frac{a}{2})^2} = \frac{1}{1+\frac{a^2}{4}}$.

设第二次清洗后蔬菜上残留的农药量为 t_2 ,

$\frac{t_2}{t_1} = f(\frac{a}{2})$, $t_2 = \frac{t}{(1+\frac{a^2}{4})^2}$.

比较 t' 与 t_2 的大小:

$(1+\frac{a^2}{4})^2 - (1+a^2) = \frac{a^4}{16} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2(a^2-8)}{16}$.

① 当 $a^2 > 8$, 即 $a > 2\sqrt{2}$ 时, $(1+\frac{a^2}{4})^2 - (1+a^2) > 0$,

即 $(1+\frac{a^2}{4})^2 > (1+a^2) > 0$, 由不等式的性质可得 $\frac{t}{(1+\frac{a^2}{4})^2} < \frac{t}{1+a^2}$,

所以把水平均分成 2 份后清洗两次蔬菜上残留的农药量比较少;

② 当 $a^2 = 8$, 即 $a = 2\sqrt{2}$ 时, $\frac{t}{(1+\frac{a^2}{4})^2} = \frac{t}{1+a^2}$,

两种方案清洗后蔬菜上残留的农药量一样多;

③ 当 $a^2 < 8$, 即 $0 < a < 2\sqrt{2}$ 时,

由不等式的性质可得 $\frac{t}{(1+\frac{a^2}{4})^2} > \frac{t}{1+a^2}$,

所以清洗一次后蔬菜上残留的农药量比较少.

(III) 参数 k, c, r 的值依次为 $2, 1, -\ln 3$. (答案不唯一)

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了【2022年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【北京高考资讯】公众号，对话框回复【期末】或者底部栏目<试题下载→期末试题>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

