

2023 北京五中高二（下）期中

数 学

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 成绩_____

一、单选题(每小题 4 分，共 40 分)

- 已知集合 $M = \{-2, 0, 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1\}$
 C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | -1 < x < 1\}$
- 下列函数中是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
 A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = |x|$ C. $y = 2^x$ D. $y = x^3$
- 已知 $c = 0.2^{0.3}$, $b = 2^{0.2}$, $a = \log_2 0.2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
 C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
- 二项式 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数是 ()
 A. 6 B. -6 C. -12 D. 12
- $M(2, 2)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, F 是抛物线 C 的焦点, 则 $|MF| =$ ()
 A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. $\frac{7}{2}$ D. 4
- 函数 $y = \sin^2 x - 3\cos x + 2$ 的最大值为 ()
 A. 5 B. $\frac{21}{4}$ C. -1 D. 1
- 在 $\triangle ABC$ 中, “对于任意 $t \neq 1$, $|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}|$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 为直角三角形” 的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知直线 $l: (m+2)x + (m-1)y - 2m - 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2 - 4x + y^2 = 0$, 则下列说法错误的是 ()
 A. 对 $\forall m \in \mathbf{R}$, 直线 l 恒过一定点
 B. $\exists m \in \mathbf{R}$, 使直线 l 与圆 C 相切
 C. 对 $\forall m \in \mathbf{R}$, 直线 l 与圆 C 一定相交
 D. 直线 l 与圆 C 相交且直线 l 被圆 C 所截得的最短弦长为 $2\sqrt{2}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_1 = -19$, $a_7 - a_4 = 6$, 若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $S_n \geq S_m$ 成立, 则 $m =$ ()

A. 6

B. 7

C. 9

D. 10

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AC \cap BD = O$, E 是线段 B_1C (含端点) 上的一动点, 则:

① $OE \perp BD_1$;

② 当 E 为线段 B_1C 的中点时, OE 取最小值;

③ 三棱锥 A_1-BDE 体积的最大值是最小值的 $\sqrt{2}$ 倍;

④ OE 与 C_1D 所成角的范围是 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

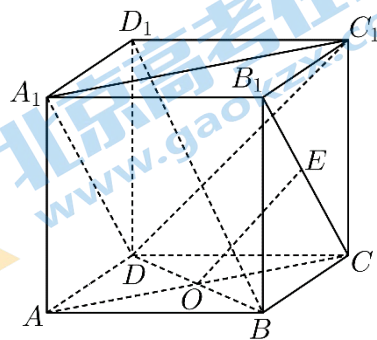
上述命题中正确的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



二、填空题(每小题 5 分, 共 25 分)

11. 设复数 $z = i(2-i)$ (其中 i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____.

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_4 =$ _____.

13. 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线与直线 $x=1$ 交于 A, B 两点, 且 $|AB|=4$, 那么双曲线 C 的离心率为 _____.

14. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - 3$ 有且仅有 3 个零点, 则 a 的取值范围是 _____.

15. 如图所示是某池塘中的浮萍蔓延的面积 $y(\text{m}^2)$ 与时间 t (月) 的关系: $y = a^t$,

有以下叙述:

① 这个指数函数的底数是 2;

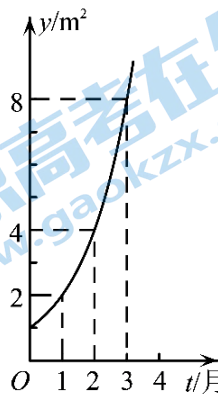
② 第 5 个月时, 浮萍蔓延的面积就会超过 30m^2 ;

③ 浮萍从 4m^2 只需要经过 1.5 个月就可蔓延到 12m^2 ;

④ 浮萍每个月增加的面积都相等;

⑤ 若浮萍蔓延到 2m^2 、 3m^2 、 6m^2 所经过的时间分别为 t_1 、 t_2 、 t_3 , 则 $t_1 + t_2 = t_3$.

其中正确的是 _____ (填序号).

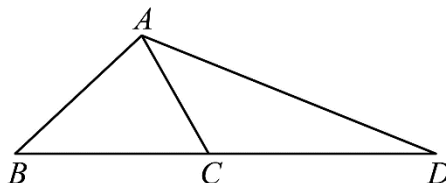


三、解答题(第 16-19, 21 题 14 分, 第 20 题 15 分, 共 85 分)

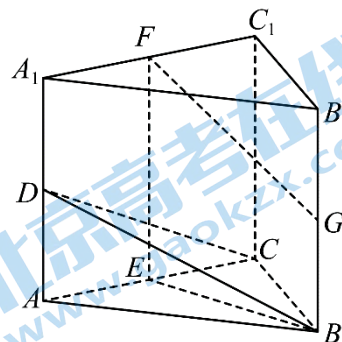
16. 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, $AB = 3\sqrt{6}$, $AC = 6$, 点 D 在 BC 边的延长线上, 且 $CD = 10$.

(1) 求 $\angle ACB$;

(2) 求 $\triangle ACD$ 的周长.



17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E, G 分别为 AA_1, AC, BB_1 的中点, A_1C_1 与平面 EBB_1 交于点 F , $AB=BC=\sqrt{5}$, $AC=AA_1=2$, $C_1C \perp BE$.



(1) 求证: F 为 A_1C_1 的中点;

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值.

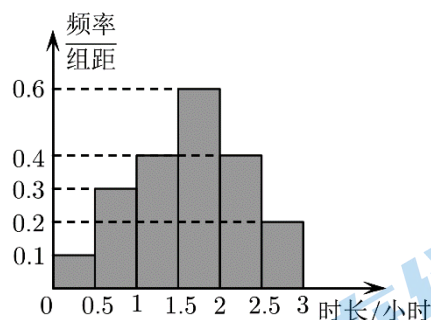
条件①: 平面 $ABC \perp$ 平面 EBB_1 ;

条件②: $BC_1=3$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

18. 第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 20 日在北京圆满闭幕, 这是一次创造诸多“第一”的盛会. 某学校为了了解学生收看北京冬奥会的情况, 随机调查了 100 名学生, 获得他们日均收看北京冬奥会的时长数据, 将数据分成 6 组: $[0, 0.5], (0.5, 1], (1, 1.5], (1.5, 2], (2, 2.5], (2.5, 3]$, 并整理得到如下频率分布直方图:

假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替.



(1) 试估计该校学生日均收看北京冬奥会的时长的平均值;

(2) 以频率估计概率, 从全校学生中随机抽取 3 人, 以 X 表示其中日均收看北京冬奥会的时长在 $(2, 3]$ 的学生人数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(3) 经过进一步调查发现, 这 100 名学生收看北京冬奥会的方式有:

①收看新闻或收看比赛集锦, ②收看比赛转播或到现场观看. 他们通过这两种方式收看的日均时长与其日均收看北京冬奥会的时长的比值如下表:

日均收看北京冬奥会的时长/小时	通过方式①收看	通过方式②收看
$[0, 0.5]$	1	0
$(0.5, 1.5]$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(1.5, 3]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

日均收看北京冬奥会的时长在 $[0, 0.5], (0.5, 1.5], (1.5, 3]$ 的学生通过方式①收看的平均时长分别记为 μ_1, μ_2, μ_3 , 写出 μ_1, μ_2, μ_3 的大小关系. (结论不要求证明)

19. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $y = k(x-1)$ 经过椭圆 C 的一个焦点与其相交于点 M, N , 且点

$A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若线段 MN 的垂直平分线与 x 轴相交于点 P , 问: 在 x 轴上是否存在一个定点 Q , 使得 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 为定值? 若存在, 求出点 Q 的坐标和 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 的值; 若不存在, 说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = e^x - a \sin x$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a = 1$ 时, 证明: 函数 $y = f(x) - 2$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点;

(3) 若对任意 $x \in [0, \pi]$, 不等式 $f(x) \geq 2 - \cos x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下两个条件, 则称 $\{a_n\}$ 为无界数列:

① $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

② 对任意的正数 δ , 都存在正整数 N , 使得, 对 $\forall n > N$, 都有 $a_n > \delta$.

(1) 若 $a_n = 2n + 1$, $b_n = 2 + \cos(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 判断数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是否是无界数列;

(2) 若 $a_n = 2n + 1$, 是否存在正整数 k , 使得对于一切 $n \geq k$, 都有 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < n - 1$ 成立? 若存在, 求出 k 的范围; 若不存在说明理由;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的无界数列, 求证: 存在正整数 m , 使得 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_m}{a_{m+1}} < m - 1$.

参考答案

1. B

【分析】根据交集的定义计算即可.

【详解】因为 $M = \{-2, 0, 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $M \cap N = \{0, 1\}$.

故选: B.

2. D

【分析】利用函数的奇偶性与单调性即可得出.

【详解】解: 由题意得:

A: $y = \frac{1}{x}$ 根据反比例函数的性质图像可知其在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不满足单调递增条件, 故 A 错误;

B: $y = |x|$ 是偶函数, 不满足奇函数的条件, 故 B 错误;

C: $y = 2^x$ 是非奇非偶函数, 不满足奇函数, 故 C 错误;

D: $y = x^3$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增函数, 满足条件, 故 D 正确.

故选: D.

3. B

【分析】借助中间值 0.1 比较大小即可.

【详解】解: $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$, $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$, $0 < c = 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$,

所以 $a < c < b$.

故选: B

4. C

【分析】根据二项式展开式的通项即可求解.

【详解】因为二项式 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_6^r x^{6-2r}$,

令 $6 - 2r = 4$, 则 $r = 1$,

所以二项式 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数为 $(-2)^1 C_6^1 = -12$,

故选: C.

5. A

【分析】将点 $M(2, 2)$ 代入 $y^2 = 2px$, 可得 $p = 1$, 即可求出准线方程, 根据抛物线的定义, 抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离, 即可求得 $|MF|$

【详解】解: 因为 $M(2, 2)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点,

所以 $2^2 = 2p \cdot 2 \Rightarrow p = 1$,

则抛物线的准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$,

由抛物线的定义可知, $|MF| = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$,

故选: A.

6. A

【分析】化简可得 $y = -\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$, 结合 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 以及二次函数的基本性质可求得原函数的最大值.

【详解】因为 $-1 \leq \cos x \leq 1$, $y = \sin^2 x - 3\cos x + 2 = -\cos^2 x - 3\cos x + 3 = -\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$,

故当 $\cos x = -1$ 时, 函数 $y = \sin^2 x - 3\cos x + 2$ 取最大值, 且 $y_{\max} = -1 + 3 + 3 = 5$.

故选: A.

7. A

【分析】设 $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$, 根据平面向量的运算可得 $|\overrightarrow{DA}| > |\overrightarrow{AC}|$, 从而可得 $C = \frac{\pi}{2}$; 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 不一定有 $C = \frac{\pi}{2}$, 根据充分条件与必要条件的定义判断即可.

【详解】设 $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA}$,

所以 $|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}|$ 即为 $|\overrightarrow{DA}| > |\overrightarrow{AC}|$,

所以 $|\overrightarrow{AC}|$ 是边 BC 上的高, 即 $CA \perp CB$, 即 $C = \frac{\pi}{2}$,

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 不一定有 $C = \frac{\pi}{2}$, 故不一定有 $|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}|$.

所以“对于任意 $t \neq 1$, $|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}|$ ”是“ $\triangle ABC$ 为直角三角形”的充分而不必要条件.

故选: A.

8. B

【分析】首先求出直线过定点 $P(1,1)$, 则可判断 A, 求出圆心 $C(2,0)$, $r=2$, 则 $|PC| = \sqrt{2} < 2$, 根据点 $P(1,1)$ 在圆内, 则直线与圆一定相交, 故可判断 B, C, 对 D 选项, 分析出 $PC \perp l$ 时弦长最短, 则

$l = 2\sqrt{r^2 - |PC|^2}$, 代入数据计算即可.

【详解】直线 $(m+2)x + (m-1)y - 2m - 1 = 0$, 即 $m(x+y-2) + 2x - y - 1 = 0$,

令 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, 即直线恒过定点 $P(1,1)$, 故 A 正确;

圆 $C: x^2 - 4x + y^2 = 0$, 即圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$, 圆心 $C(2,0)$, 半径 $r=2$,

则 $|PC| = \sqrt{(1-2)^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 2$, 即点 $P(1,1)$ 在圆内, 所以直线与圆一定相交, 故 B 错误, 故 C 正确,

当 $PC \perp l$ 时直线与圆相交且直线被圆所截得的弦长最短, 最短弦长 $l = 2\sqrt{r^2 - |PC|^2} = 2\sqrt{2}$, 故 D 正确,

故选: B.

9. D

【分析】根据题意,求得等差数列的通项公式,从而得到数列 $\{a_n\}$ 前10项都是负数,从而得到结果.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由性质知 $a_7 - a_4 = 3d = 6$, 则 $d = 2$, 且 $a_1 = -19$,

则 $a_n = a_1 + (n-1)d = -19 + (n-1) \times 2 = 2n - 21$,

令 $a_n > 0$, 得 $n > \frac{21}{2}$, 即前10项都是负数,

所以 S_{10} 最小, 所以 $m = 10$.

故选:D

10. B

【分析】利用线面垂直的性质判断①; 判断 $\triangle B_1OC$ 的形状判断②; 利用线面平行结合等体积法判断③; 作出 OE 与 C_1D 所成的角, 求出范围作答.

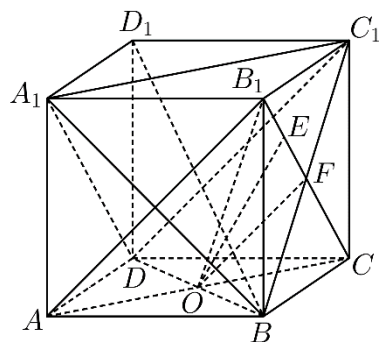
【详解】在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AC \cap BD = O$, E 是线段 B_1C 上的动点,

命题①, $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, $AC \perp DD_1$, 正方形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$,

$BD, DD_1 \subset$ 平面 BDD_1 , $BD \cap DD_1 = D$, 因此 $AC \perp$ 平面 BDD_1 , 而 $BD_1 \subset$ 平面 BDD_1 , 则 $BD_1 \perp AC$,

同理 $BD_1 \perp AB_1$, 又 $AB_1 \cap AC = A$, $AB_1, AC \subset$ 平面 AB_1C , 有 $BD_1 \perp$ 平面 AB_1C , $OE \subset$ 平面 AB_1C , 则 $OE \perp BD_1$, ①正确;

命题②, 在正三角形 $\triangle AB_1C$ 中, O 是 AC 中点, 连 B_1O , 如图, $B_1O \perp AC$, $B_1O = \frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} = CO$, E 为 B_1C 中点,



在 $Rt\triangle B_1OC$ 中, OE 与 B_1C 不垂直, OE 不是最小值, ②错误;

命题③, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 对角面 A_1B_1CD 是矩形, 即 $B_1C \parallel A_1D$, 又 $B_1C \not\subset$ 平面 A_1BD , $A_1D \subset$ 平面 A_1BD ,

则 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD , 点 E 到平面 A_1BD 的距离为定值, $\triangle A_1BD$ 面积为定值, 而 $V_{A_1-BDE} = V_{E-A_1BD}$,

则三棱锥 $A_1 - BDE$ 体积为定值, ③错误;

命题④, 连接 BC_1 与 B_1C 相交于点 F , 连接 OF , 则 F 为 BC_1 与 B_1C 中点,

而 O 为 DB 中点, 则 $OF \parallel DC_1$, 因此 OE 与 DC_1 所成的角等于 $\angle EOF$,

在 $\triangle AB_1C$ 中, $OF \parallel AB_1$, $\angle FOC = \angle B_1AC = \frac{\pi}{3}$, 而 $B_1O \perp AC$, 则 $\angle B_1OF = \frac{\pi}{6}$,

于是当 E 在 C 点时, $\angle EOF$ 有最大值 $\frac{\pi}{3}$, 当 E 与 F 重合时, $\angle EOF$ 有最小值 0 ,

所以 OE 与 C_1D 所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, ④正确,

综上所述, 正确命题的个数为 2 .

故选: B

【点睛】思路点睛: 求三棱锥的体积时要注意三棱锥的每个面都可以作为底面, 借助等体积法求解问题.

11. $\sqrt{5}$

【分析】化简 z , 根据复数模的运算即可求得结果.

【详解】因为 $z = i(2-i) = 1+2i$, 所以 $|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

故答案为: $\sqrt{5}$.

12. 8

【分析】根据 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$, 作差得到等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2 , 再求出 a_1 , 最后根据等比数列的通项公式计算可得.

【详解】解: 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$,

$\therefore a_n = S_{n-1} + 1 (n \geq 2)$,

$\therefore a_{n+1} - a_n = a_n$, $\therefore a_{n+1} = 2a_n$, 故等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2 .

在 $a_{n+1} = S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 中,

令 $n=1$, 可得 $a_2 = a_1 + 1$, $\therefore a_1 = 1$, 则 $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 1 \times 8 = 8$.

故答案为: 8 .

13. $\sqrt{5}$

【分析】由题可得 $|b|=2$, 然后根据离心率公式结合条件即得.

【详解】由双曲线的方程可得 $a=1$, 且渐近线的方程为: $y = \pm bx$,

与 $x=1$ 联立可得 $y = \pm b$, 所以 $|AB| = |2b|$,

由题意可得 $4 = 2|b|$, 解得 $|b|=2$, 又 $c^2 = a^2 + b^2$,

所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{1+4}{1}} = \sqrt{5}$.

故答案为: $\sqrt{5}$.

14. $(-\sqrt{3}, 1) \cup -\sqrt{3} < x < 1$

【分析】问题转化为函数 $f(x)$ 与直线 $y=3$ 有三个不同交点, 分 $a \leq 0, a > 0$ 作出函数图象, 数形结合即可求

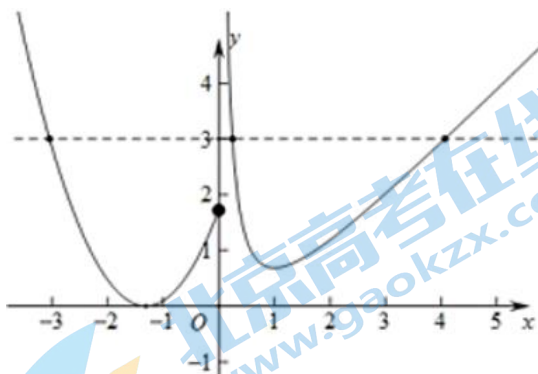
解.

$$\text{【详解】} \because f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$$

若函数 $g(x) = f(x) - 3$ 有且仅有 3 个零点, 则函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 3$ 有三个不同的交点,

$$\because y = x + \frac{1}{x} + a \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + a = 2 + a, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时等号成立,}$$

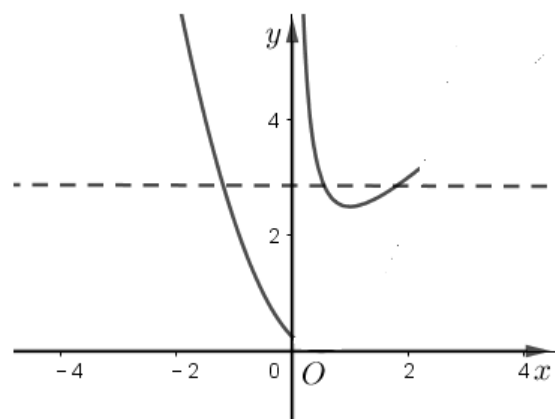
$\therefore$ 当 $a \leq 0$ 时, 如图:



$$\therefore (0-a)^2 < 3 \text{ 即可,}$$

$$\text{解得 } -\sqrt{3} < a \leq 0,$$

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, 如图:



$$\therefore \begin{cases} 2+a < 3 \\ a^2 < 3 \end{cases} \text{ 即可,}$$

$$\text{解得 } 0 < a < 1,$$

$$\text{综上, } -\sqrt{3} < a < 1$$

$$\text{故答案为: } (-\sqrt{3}, 1)$$

15. ①②⑤

【分析】由已知, 选项①可将图像上的点带入给的函数关系中求解即可; 选项②, 利用求解出的函数解析式, 令 $t = 5$ 求解出浮萍蔓延的面积即可做出判断; 选项③, 分别求出浮萍 4m^2 和浮萍 12m^2 所对应的时间, 然后作差与 1.5 比较大小即可; 选项④, 分别算出从第一个月开始, 每个月增加的面积, 通过比较即可做

出判断：选项⑤，分别求解出萍蔓延到 2m^2 、 3m^2 、 6m^2 所经过的时间分别为 t_1 、 t_2 、 t_3 ，然后验证是否满足 $t_1 + t_2 = t_3$ 即可。

【详解】由题意，函数图像满足 $y = a^t$ 的关系，有图像可知，当 $t=1$ 时， $y=2$ ，

所以 $a^1 = 2$ ，解得 $a = 2$ ，当 $t=2$ 时， $2^2 = 4$ ，满足，

当 $t=3$ 时， $2^3 = 8$ ，满足，故 $a = 2$ ，选项①正确；

当 $t=5$ 时， $2^5 = 32 > 30$ ，故浮萍蔓延的面积就会超过 30m^2 ，选项②正确；

由题意， $2^t = 4$ ，所以 $t = 2$ ， $2^t = 12 = 2^{\log_2 12}$ ，所以 $t = \log_2 12$ ，所以增加的时间为

$\log_2 12 - 2 = \log_2 12 - \log_2 4 = \log_2 3 = \log_4 9$ ，而 $1.5 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \log_2 2 = \log_4 8$ ，所以 $\log_2 12 - 2 > 1.5$ ，故选项③错

误；

由题意可知，当 $t=1$ 时， $y=2$ ；当 $t=2$ 时， $y=2^2 = 4$ ；当 $t=3$ 时， $y=2^3 = 8$ ；

当 $t=4$ 时， $y=2^4 = 16$ ；当 $t=5$ 时， $y=2^5 = 32$ ，

所以从第一个开始，每个月增加的面积分别为 2m^2 、 4m^2 、 8m^2 、 16m^2 ，

所以增加的面积不相等，故选项④错误；

由题意， $2^{t_1} = 2$ ，所以 $t_1 = 1$ ， $2^{t_2} = 3 = 2^{\log_2 3}$ ，

所以 $t_2 = \log_2 3$ ， $2^{t_3} = 6 = 2^{\log_2 6}$ ，所以 $t_3 = \log_2 6$ ，

所以 $t_1 + t_2 = 1 + \log_2 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6 = t_3$ ，故选项⑤正确。

故答案为：①②⑤

16. (1) $\frac{\pi}{3}$ ；

(2) 30.

【分析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理即可求解；

(2) 由 (1) 可求得 $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$ ，在 $\triangle ACD$ 中，利用余弦定理可求 CD ，从而可求 $\triangle ACD$ 的周长。

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中， $B = \frac{\pi}{4}$ ， $AB = 3\sqrt{6}$ ， $AC = 6$ ，

由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin B}$ ，故 $\sin \angle ACB = \frac{AB \cdot \sin B}{AC} = \frac{3\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 由 (1) 得 $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$ 。

在 $\triangle ACD$ 中， $AC = 6$ ， $CD = 10$ ， $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$ ，

所以 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD} = \sqrt{6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 14$ 。

所以 $\triangle ACD$ 的周长为 $6+10+14=30$.

17. (1)见解析

(2) $\frac{2\sqrt{105}}{105}$

【分析】(1) 由线面平行的性质定理可证得 $BB_1 // EF$ ，即可证明；

(2) 根据条件建立空间直角坐标系，求出各点坐标，利用方程组解得平面 BCD 一个法向量，利用直线的方向向量和平面的法向量计算即可.

【详解】(1) 由三棱柱的性质知， $BB_1 // CC_1$ ， $BB_1 \not\subset$ 平面 AA_1C_1C ， $CC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C ，

所以 $BB_1 //$ 平面 AA_1C_1C ，又因为 $BB_1 \subset$ 平面 EFB_1B ，

平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $EFB_1B = EF$ ，

所以 $BB_1 // EF$ ，因为 E 为 AC 的中点，所以 F 为 A_1C_1 的中点.

(2) 选条件①，因为平面 $ABC \perp$ 平面 EBB_1 ，平面 $ABC \cap$ 平面 $EBB_1 = BE$ ，

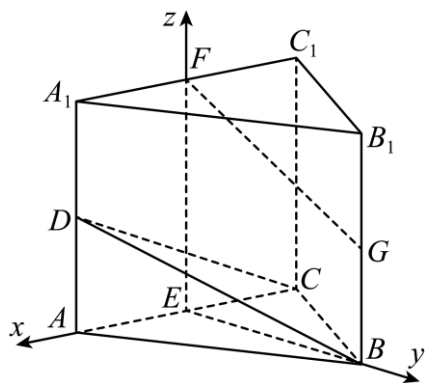
又因为 $AB = BC = \sqrt{5}$ ， E 为 AC 的中点，所以 $BE \perp AC$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 EBB_1 ，又因为 $EF \subset$ 平面 EBB_1 ，所以 $EF \perp AC$ ，

又因为 $BE \perp AC$ ， $C_1C \perp BE$ ， $BE \cap CC_1 = E$

AC ， $C_1C \subset$ 平面 AA_1C_1C ，所以 $BE \perp$ 平面 AA_1C_1C ，

如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



由题意得 $B(0,2,0), C(-1,0,0), D(1,0,1), F(0,0,2), G(0,2,1)$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = (2,0,1), \overrightarrow{CB} = (1,2,0).$$

设平面 BCD 的法向量 $\vec{n} = (a,b,c)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

$a = 2$ ，则 $b = -1, c = -4$ ，

$\therefore$ 平面 BCD 的法向量 $\vec{n} = (2, -1, -4)$ ，

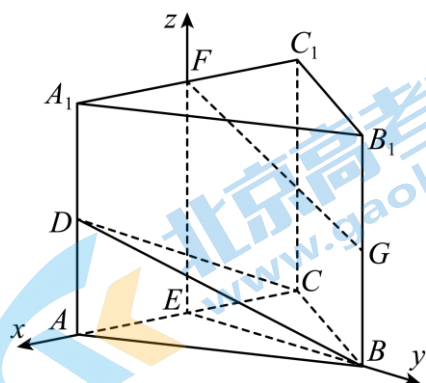
又 $\overrightarrow{FG} = (0, 2, -1)$ ，

设直线 FG 与平面 BCD 所成的角为 θ ，

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \vec{n}, \overrightarrow{FG}| = \frac{2\sqrt{105}}{105},$$

所以直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{105}}{105}$.

选条件②, 因为 $AB = BC = \sqrt{5}$, $AC = AA_1 = 2$, $BC_1 = 3$,
 则 $CC_1^2 + BC^2 = BC_1^2$, 所以 $CC_1 \perp BC$, 又因为 $C_1C \perp BE$,
 $BC \cap BE = B$, $BC, BE \subset$ 平面 ABC , 所以 $C_1C \perp$ 平面 ABC ,
 因为 $AB = BC = \sqrt{5}$, E 为 AC 的中点, 所以 $BE \perp AC$,
 如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



由题意得 $B(0, 2, 0), C(-1, 0, 0), D(1, 0, 1), F(0, 0, 2), G(0, 2, 1)$,

$$\therefore \overrightarrow{CD} = (2, 0, 1), \overrightarrow{CB} = (1, 2, 0).$$

设平面 BCD 的法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases},$$

$a = 2$, 则 $b = -1, c = -4$,

$\therefore$ 平面 BCD 的法向量 $\vec{n} = (2, -1, -4)$,

又 $\overrightarrow{FG} = (0, 2, -1)$,

设直线 FG 与平面 BCD 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \vec{n}, \overrightarrow{FG}| = \frac{2\sqrt{105}}{105},$$

所以直线 FG 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{105}}{105}$.

18. (1) 1.875 小时

(2) 分布列见解析, 数学期望为 0.9

(3) $\mu_2 > \mu_3 > \mu_1$

【分析】(1) 根据频率分布直方图直接计算即可;

(2) 可得 X 的可能取值且 $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, 求出 X 取不同值的概率即可得出分布列, 求出数学期望;

(3) 分别计出 μ_1, μ_2, μ_3 即可比较.

(1)

根据题意, 估计该校学生日均收看北京冬奥会的时长的平均值为:

$$(0.5 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 1.5 \times 0.4 + 2 \times 0.6 + 2.5 \times 0.4 + 3 \times 0.2) \times 0.5 = 1.875 \text{ 小时};$$

(2)

由条件可知, 从全校学生中随机抽取 1 人, 其日均收看北京冬奥会的时长在 $(1.5, 2.5]$ 的概率估计为 $0.2 + 0.1 = 0.3$,

X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$, 且 $X \sim B(3, 0.3)$,

$$\text{则 } P(X=0) = C_3^0 (1-0.3)^3 = 0.343, \quad P(X=1) = C_3^1 (0.3)^1 (1-0.3)^2 = 0.441,$$

$$P(X=2) = C_3^2 (0.3)^2 (1-0.3)^1 = 0.189, \quad P(X=3) = C_3^3 (0.3)^3 = 0.027,$$

X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	0.343	0.441	0.189	0.027

所以 X 的数学期望 $E(X) = 3 \times 0.3 = 0.9$;

(3)

$$\mu_1 = 0.5 \times 1 = 0.5 \text{ 小时},$$

$$\text{因为 } (0.5, 1], (1, 1.5] \text{ 的人数之比为 } 3:4, \text{ 所以 } \mu_2 = \left(1 \times \frac{3}{7} + 1.5 \times \frac{4}{7}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{6}{7} \text{ 小时},$$

因为 $(1.5, 2], (2, 2.5], (2.5, 3]$ 的人数之比为 $3:2:1$,

$$\text{所以 } \mu_3 = \left(2 \times \frac{3}{6} + 2.5 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \text{ 小时},$$

所以 $\mu_2 > \mu_3 > \mu_1$.

$$19. (1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(2) \text{存在, } Q(1, 0), \quad \frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{1}{4}.$$

【分析】(1) 根据椭圆 C 的焦点在 x 轴上和直线 $y = k(x-1)$ 经过椭圆 C 的一个焦点得到 $(1, 0)$ 为椭圆 C 的焦点, 即 $c=1$, 根据 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上得到 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 再结合 $a^2 = b^2 + c^2$ 得到 a^2, b^2 即可得到椭圆 C 的方程;

(2) 当 $k \neq 0$ 时, 联立直线和椭圆方程, 然后利用韦达定理得到 MN 中点坐标和弦长 $|MN|$, 然后根据垂直

平分得到点 P 坐标，即可得到 $\frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{|(1-4m)k^2 - 3m|}{12k^2 + 12}$ ，然后根据 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 为定值列方程，解方程得到

$Q(1,0)$ ，再说明 $k=0$ 时 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 也是定值即可得到在 x 轴上存在定点 $Q(1,0)$ ，使得 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 为定值.

【详解】(1) 因为直线 $y=k(x-1)$ 经过椭圆 C 的一个焦点，所以 $(1,0)$ 为椭圆 C 的焦点，即 $c=1$ ，因为

$A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ ，又 $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 1$ ，联立方程可得 $a^2 = 4$ ， $b^2 = 3$ ，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ， $Q(m, 0)$

当 $k \neq 0$ 时，联立 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ ，所以 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}$ ，

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4k^2}{3+4k^2}, \quad MN \text{ 中点为 } \left(\frac{4k^2}{3+4k^2}, \frac{-3k}{3+4k^2} \right),$$

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{64k^4}{3+4k^2} - 4 \cdot \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{144k^2 + 144}{3+4k^2}}$$

$$= \frac{12k^2 + 12}{3+4k^2},$$

线段 MN 得中垂线方程为 $y - \frac{-3k}{3+4k^2} = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{4k^2}{3+4k^2} \right)$ ，令 $y=0$ ，解得 $x = \frac{k^2}{3+4k^2}$ ，所以 $P\left(\frac{k^2}{3+4k^2}, 0\right)$ ，

$$\text{所以 } \frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{\left| \frac{k^2}{3+4k^2} - m \right|}{\frac{12k^2 + 12}{3+4k^2}} = \frac{|(1-4m)k^2 - 3m|}{12k^2 + 12}, \quad \text{令 } \frac{1-4m}{12} = \frac{-3m}{12}, \quad \text{解得 } m=1, \quad \text{此时 } \frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{1}{4};$$

当 $k=0$ ， $Q(1,0)$ 时，联立 $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $x = \pm 2$ ，所以 $M(-2,0)$ ， $N(2,0)$ ， $P(0,0)$ ，此时

$$\frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{1-0}{2+2} = \frac{1}{4},$$

所以在 x 轴上存在定点 $Q(1,0)$ ，使得 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 为定值，定值为 $\frac{1}{4}$.

【点睛】 $\frac{A}{B}$ 型式子为定值求参数的方法：

①让分子分母对应项系数比值相等，例如： $\frac{(1+m)x^2+2}{x^2+1}$ 为定值，则 $\frac{1+m}{1} = \frac{2}{1}$ ，解方程即可；

②设 $\frac{A}{B} = \lambda$ ，然后根据定值与变量无关列方程，例如： $\frac{(1+m)x^2+2}{x^2+1}$ 为定值，设 $\frac{(1+m)x^2+2}{x^2+1} = \lambda$ ，整理得

$$(1+m-\lambda)x^2+2-\lambda=0, \text{ 定值与变量 } x \text{ 无关, 所以 } \begin{cases} 1+m-\lambda=0 \\ 2-\lambda=0 \end{cases}.$$

20. (1) $x+y-1=0$;

(2) 证明见解析;

(3) $(-\infty, 1]$.

【分析】(1) 根据导数几何意义可求得切线斜率 $f'(0)$ ，结合 $f(0)=1$ 可得切线方程；

(2) 令 $g(x) = f(x) - 2$ ，求导后可知 $g'(x) > 0$ ，由此确定 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增，结合零点存在定理可得结论；

(3) $h(x) = f(x) - 2 + \cos x$ ，将问题转化为 $h(x) \geq 0$ 恒成立；求导后，分析可知当 $a \geq 0$ 时， $h'(x)$ 单调递增；当 $a > 1$ 时，利用零点存在定理可说明 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减，由此可得 $h(x) < h(0) = 0$ ，知不合题意；当 $a = 1$ 时，可得 $h'(x) > h'(0) = 0$ ，知 $h(x)$ 单调递增，满足题意；当 $a < 1$ 时，采用放缩法得 $h(x) > e^x - \sin x + \cos x - 2$ ，结合 $a = 1$ 时的结论可知其满足题意；综合三种情况可得结果。

【详解】(1) 当 $a = 2$ 时， $f(x) = e^x - 2\sin x$ ，则 $f'(x) = e^x - 2\cos x$ ，

$\therefore f'(0) = 1 - 2 = -1$ ，又 $f(0) = 1$ ，

$\therefore f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为： $y = -x + 1$ ，即 $x + y - 1 = 0$ 。

(2) 当 $a = 1$ 时，令 $g(x) = f(x) - 2 = e^x - \sin x - 2$ ，则 $g'(x) = e^x - \cos x$ ；

当 $x \in (0, \pi)$ 时， $e^x > e^0 = 1$ ， $\cos x < 1$ ，即 $g'(x) > 0$ ，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增，又 $g(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ ， $g(\pi) = e^\pi - 2 > 0$ ，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点，即 $f(x) - 2$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点。

(3) 令 $h(x) = f(x) - 2 + \cos x = e^x - a\sin x + \cos x - 2$ ，

则对任意 $x \in [0, \pi]$ ， $h(x) \geq 0$ 恒成立；又 $h'(x) = e^x - a\cos x - \sin x$ ，

令 $t(x) = h'(x)$ ，则 $t'(x) = e^x + a\sin x - \cos x$ ；

当 $a \geq 0$ 时，若 $x \in [0, \pi]$ ，则 $e^x \geq e^0 = 1$ ， $\cos x \leq 1$ ， $\sin x \geq 0$ ，

$\therefore t'(x) \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立，则 $h'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增；

①当 $a > 1$ 时， $h'(0) = 1 - a < 0$ ， $h'(\pi) = e^\pi + a > 0$ ，

$\therefore \exists x_0 \in (0, \pi)$ ，使得 $h'(x_0) = 0$ ，且当 $x \in (0, x_0)$ 时， $h'(x) < 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减，此时 $h(x) < h(0) = 0$ ，不合题意；

②当 $a=1$ 时, $h(x) = e^x - \sin x + \cos x - 2$;

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $h'(x) > h'(0) = 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

$\therefore h(x) \geq h(0) = 0$ 恒成立, 满足题意;

③当 $a < 1$ 时, $h(x) = e^x - a \sin x + \cos x - 2 > e^x - \sin x + \cos x - 2$,

由②知: 对任意 $x \in [0, \pi]$, $h(x) > e^x - \sin x + \cos x - 2 \geq 0$, 满足题意;

综上所述: 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

【点睛】关键点点睛: 利用导数几何意义求解切线方程、函数零点个数问题、恒成立问题的求解; 本题求解恒成立问题的关键是能够通过构造函数的方式, 将问题转化为含参数函数单调性的讨论问题, 进而由单调性和函数最值确定满足题意的参数范围.

21. (1) $\{a_n\}$ 是无界数列; $\{b_n\}$ 不是无界数列.

(2) 存在, $k(k \geq 4)$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 对任意的正整数 δ , 取 N 为大于 $\frac{\delta}{2}$ 的一个偶数, 有 $a_N = 2N + 1 > 2 \cdot \frac{\delta}{2} + 1 > \delta$, 符合无界数列的定义; 取 $\delta=3$, 显然 $b_n = 2 + \cos(n) \leq 3$, 不符合无界数列的定义.

(2) 讨论 $n=1$, $n=2$, $n=3$ 都不成立, 当 $n \geq 4$ 时, 将 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < n-1$ 变形为:

$$n - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}, \text{ 从而求得 } k \text{ 的范围.}$$

(3) 观察要证的不等式结构与 (2) 相似, 故应用 (2) 变形后, 再由 $\{a_n\}$ 是单调递增的无界正数列证明.

【详解】(1) $\{a_n\}$ 是无界数列, 理由如下:

对任意的正整数 δ , 取 N 为大于 $\frac{\delta}{2}$ 的一个偶数, 有 $a_N = 2N + 1 > 2 \cdot \frac{\delta}{2} + 1 > \delta$, 所以 $\{a_n\}$ 是无界数列.

$\{b_n\}$ 不是无界数列, 理由如下:

取 $\delta=3$, 显然 $b_n = 2 + \cos(n) \leq 3$, 不存在正整数 N , 满足 $b_N > 3$, 所以 $\{b_n\}$ 不是无界数列.

(2) 存在满足题意的正整数 k , 且 $k \geq 4$.

当 $n=1$ 时, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5} < 0$, 不成立.

当 $n=2$ 时, $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{5} + \frac{5}{7} < 1$, 不成立.

当 $n=3$ 时, $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} = \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} < 2$, 不成立.

当 $n \geq 4$ 时, 将 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < n-1$ 变形为: $n - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{7} \cdots + \frac{2}{2n+3} \geq \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \frac{2}{11} > 1.$$

即取 $k=4$ ，对于一切 $n \geq k$ ，有 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < n-1$ 成立.

(3) 因为数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的无界数列，所以 $a_n > 0$ ， $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } n - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) &= \frac{a_2 - a_1}{a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \\ &> \frac{a_2 - a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_3 - a_2}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{a_1}{a_{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < n - 1 + \frac{a_1}{a_{n+1}}$$

因为 $\{a_n\}$ 是无界数列，取 $\delta = 2a_1$ ，由定义知存在正整数 N_1 ，使 $a_{N_1+1} > 2a_1$ 所以 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}} < N_1 - 1$.

由定义可知 $\{a_n\}$ 是无穷数列，考察数列 a_{N_1+1} ， a_{N_1+2} ， $a_{N_1+3} \dots$ ，显然这仍是一个单调递增的无界数列，同上理由可知存在正整数 N_2 ，使得

$$\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1+2}} + \frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+3}} + \cdots + \frac{a_{N_2}}{a_{N_2+1}} < (N_2 - N_1 + 1) - 1.$$

故存在正整数 N_2 ，使得

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}} + \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1+2}} + \frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1+3}} + \cdots + \frac{a_{N_2}}{a_{N_2+1}} < (N_1 - 1) + (N_2 - N_1 + 1 - 1) = N_2 - 1.$$

故存在正整数 $m = N_2$ ，使得 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_m}{a_{m+1}} < m - 1$ 成立

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯