

天一大联考
2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(三)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的选项框号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

参考公式:设圆台的上下底面半径分别为 r, R , 圆台的高为 h , 则圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h$ 。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$, $B = \{-3a, a\}$, 若 $A \cup B = A$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 1$, 前 5 项和 $S_5 = 25$, 则 $a_7 =$

- A. 15 B. 14 C. 13 D. 12

3. 已知向量 $a = (3, 1)$, $b = (2, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 若 $a \perp b$, 则 $|a + b| =$

- A. 5 B. $5\sqrt{2}$ C. $5\sqrt{3}$ D. 10

4. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 则“圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$ 有公共点”的必要条件是

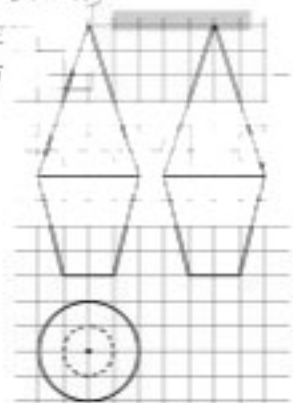
- A. $41 < a < 50$ B. $43 < a < 49$ C. $a > 41$ D. $40 < a < 51$

5. 中世纪是骑兵的黄金时代, 其中最具有代表性的是哥特重骑兵, 他们的主要武器是长矛, 如图所示, 粗线为一款长矛的矛头模型的三视图, 图中小正方形的边长均为 1, 则该模型的体积为

- A. $\frac{50}{3}\pi$ B. 17π
C. $\frac{52}{3}\pi$ D. 18π

6. 已知 $a, b \in (0, +\infty)$, $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+5b} = 2$, 则 $a+b$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{14}$
C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}}{7}$



7. 计算: $\frac{\sin 100^\circ - 2\sin 160^\circ}{\cos 160^\circ} =$

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中, 边 AB, AC 的垂直平分线交于点 D , 且 $\vec{AD} + \vec{CD} = \vec{AB}$, 若 $|\vec{DA}| = |\vec{AB}| = 2$, 则 $\vec{AD} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) =$

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-1}, & x \leq 0, \\ x^2 - x - 3, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为

- A. $(2, +\infty)$ B. $\left(-\frac{15}{4}, 2\right)$
C. $\left(-\frac{13}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(-\frac{13}{4}, 2\right)$

10. 某工厂使用过滤仪器过滤排放的废气, 过滤过程中体积一定的废气中的污染物浓度 P (mg/L) 与过滤时间 t (h) 之间的关系式为 $P = P_0 \cdot e^{-kt}$ ($P_0 > 0, k$ 为常数). 根据以往的经验, 前 2 个小时的过滤能够消除 $\frac{1}{4}$ 的污染物, 现有如下说法: ① $k = \ln 2$; ② 经过 1 个小时的过滤后, 能够消除 $\frac{1}{5}$ 的污染物; ③ 经过 5 个小时的过滤后, 废气中剩余的污染物低于原来的 $\frac{1}{2}$. 则其中正确的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球表面积为 27π , 点 E 为棱 BB_1 的中点, 且 $DE \perp$ 平面 α , 点 $C_1 \in$ 平面 α , 则平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形的面积为

- A. $\frac{81\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{81\sqrt{2}}{8}$ C. $\frac{81}{4}$ D. $\frac{81}{8}$

12. 已知点 A 在双曲线 $C: \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 上, 且双曲线 C 的上、下焦点分别为 F_1, F_2 , 点 B 在 $\angle F_1AF_2$ 的平分线上, 且 $BF_2 \perp AB$, 若点 D 在直线 $l: y = x - 8$ 上, 则 $|BD|$ 的最小值为

- A. $2\sqrt{2} - 2$ B. $3\sqrt{2} - 2$ C. $4\sqrt{2} - 2$ D. $4\sqrt{2} + 4$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 3, \\ 3x - y \geq 0, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = x + 2y$ 的最大值为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = \log_6(x+3)$, $x \in [0, m]$, 若 $\forall x_1 \in [0, m], \exists x_2 \in [0, m]$, 使得 $f(x_1) = \frac{1}{f(x_2)}$, 则 $m =$ _____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ ($a > b$) 的焦点 F 到准线 l 的距离为 3, 点 M 在抛物线 C 上, $\vec{OM} = 2\vec{ON}$ (点 O 为坐标原点), 过点 N 作直线 OM 的垂线 l_2 与 x 轴交于点 P , 若 $2|OP| = |MF| + \lambda p$, 则实数 $\lambda =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \left[\sin \frac{x}{2} \right] + \sqrt{2} \left[\cos \frac{x}{2} \right]$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 _____; 当 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$ 时, $f(x)$ 的值域为 _____ (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = 3\sin^2 \frac{3}{2}x + a\sin 3x$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$, 其中 $a > 0$.

(I) 求 a 的值;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, 2\pi]$ 上的单调递减区间.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2a_2 = 6$, $\frac{a_{n+1} + 4S_n + 4a_n}{4} = S_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\left\{\frac{8n+10}{3} \cdot a_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, 点 M 在边 BC 上, $\angle MAC = \frac{\pi}{6}$, $AC = 3$, $AM + BC = 2\sqrt{3}$.

(I) 求证: $\triangle AMC$ 是等腰三角形;

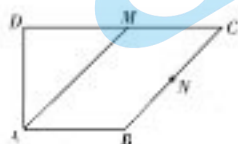
(II) 若 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 求 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACM$ 的面积之差.

20. (12分)

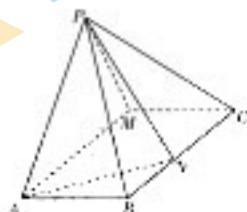
已知梯形 $ABCD$ 如图(1)所示, 其中 $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $CD = \sqrt{2}BC$, 过点 A 作 BC 的平行线交线段 CD 于 M , 点 N 为线段 BC 的中点, 现将 $\triangle DAM$ 沿 AM 进行翻折, 使点 D 到达点 P 的位置, 且平面 $PAM \perp$ 平面 AMC , 得到的图形如图(2)所示.

(I) 求证: $AP \perp PN$;

(II) 求平面 PAN 与平面 PCM 所形成的锐二面角的余弦值.



图(1)



图(2)

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 上顶点为 D , 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上, 且 $x_0 y_0 \neq 0$.

(I) 过点 D 作斜率为 2 的直线 l , 设 l 与椭圆 C 的另一个交点为 G , 求 $|DG|$;

(II) 若直线 AD 与直线 BP 交于点 E , 直线 DP 与 x 轴交于点 M , 求证: 直线 EM 过定点 $T(2, 1)$.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x(e^x - a)$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若 $a = 2e$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2\ln x + \ln \frac{e^2}{4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯