# 河南省 2024 年普通高考适应性测试

# 数学

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．样本数据16，24，14，10，20，30，12，14，40的中位数为

A．14　　B．16　　C．18　　D．20

【答案】B

【解析】10，12，14，14，16，20，24，30，40，中位数16

2．椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，则$a=$

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】A

【解析】$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，选A.

3．记等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，$a_3+a_7=6$，$a_{12}=17$，则$S_{16}=$

A．120　　B．140　　C．160　　D．180



【答案】C

【解析】$\begin{cases}a_1+2d+a_1+6d=6\\a_1+11d=17\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a_1=-5\\d=2\end{cases}$，$S_{16}=16\times(-5)+\dfrac{16\times15}{2}\times2=160$，选 C.

4．设$\alpha,\beta$是两个平面，$m$，$l$是两条直线，则下列命题为真命题的是

A．若$\alpha\perp\beta$，$m\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，则$m\perp l$

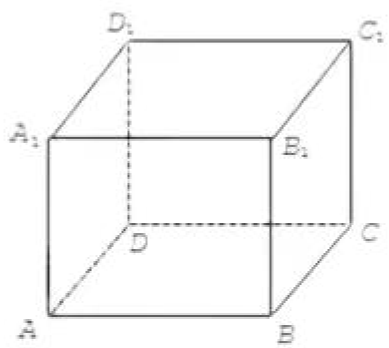
B．若$m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，$m\parallel l$，则$\alpha\parallel\beta$

C．若$\alpha\cap\beta=m$，$l\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，则$m\parallel l$

D．若$m\perp\alpha$，$l\perp\beta$，$m\parallel l$，则$\alpha\perp\beta$

【答案】C

【解析】如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，




对于 A，设面$\alpha$为面$ABCD$，面$\beta$为$ADD_1A_1$，$m=B_1C_1$，$l=BC$，$m\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，$\alpha\perp\beta$但$m\parallel l$，A 错.

对于 B，$m=BC$，面$\alpha$为面$ABCD$，$l=AD$，面$\beta$为面$ADD_1A_1$，此时$m\subset\alpha$，$l\subset\beta$，$m\parallel l$，但$\alpha$与$\beta$不平行，B 错.

对于 D，面$\alpha$为面$ABCD$，面$\beta$为面$A_1B_1C_1D_1$，$m=AA_1$，$l=BB_1$，此时$m\perp\alpha$，$l\perp\beta$，$m\parallel l$，但平面$\alpha$与平面$\beta$平行不垂直，D 错，选 C.

5．甲、乙、丙等 5 人站成一排，且甲不在两端，乙和丙之间恰有 2 人，则不同排法共有

A．20 种　　B．16 种　　C．12 种　　D．8 种

【答案】B

【解析】甲一定在乙丙中间，否则甲就要在两端，$C_2^1A_2^2A_2^2A_2^2=16$



6．已知$Q$为直线$l:x+2y+1=0$上的动点，点$P$满足$\overrightarrow{QP}=(1,-3)$，记$P$的轨迹为$E$，则

A．$E$是一个半径为$\sqrt{5}$的圆　　　　B．$E$是一条与$l$相交的直线

C．$E$上的点到$l$的距离均为$\sqrt{5}$　　　　D．$E$是两条平行直线

【答案】C

【解析】$P(x,y)$，$Q(m,n)$，$\overrightarrow{QP}=(x-m,y-n)=(1,-3)$，$\therefore m=x-1$，$n=y+3$

$Q(x-1,y+3)$在$x+2y+1=0$上，$\therefore x+2y+6=0$，

$E$上的点到$l$的距离$d=\dfrac{6-1}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，选C.

7．已知$\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则$\dfrac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=$

A．$\dfrac{1}{4}$　　　　B．$\dfrac{3}{4}$　　　　C．1　　　　D．$\dfrac{3}{2}$

【答案】A

【解析】$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-4\dfrac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}$，

$\therefore 2\tan^2\theta+5\tan\theta+2=0$，$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$或$-2$，$\theta\in\left(\dfrac{3}{4}\pi,\pi\right)$，

$\therefore \tan\theta\in(-1,0)$，$\therefore \tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\tan^2\theta+2\tan\theta+1}{2+2\tan\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{2}=\dfrac{1}{4}$，选A.

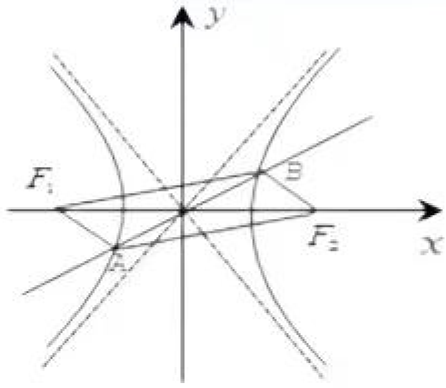
8．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过坐标原点的直线与$C$交于$A,B$两点，$|F_1B|=2|F_1A|$，$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=4a^2$，则$C$的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　　　B．2　　　　C．$\sqrt{5}$　　　　D．$\sqrt{7}$

【答案】D



【解析】$\because O$为$AB$中点也是$F_1F_2$中点，$\therefore AF_2BF_1$为平行四边形，




$|F_1B|=|F_2A|=2|F_1A|$，又$|F_2A-F_1A|=2a$，$\therefore F_1A=2a$，$F_2A=4a$.

$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{AF_1}=-\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-2a\cdot 4a\cos\angle F_1AF_2=-8a^2\cos\angle F_1AF_2=4a^2$，

$\therefore\cos\angle F_1AF_2=-\dfrac{1}{2}$，$F_1F_2^2=AF_1^2+AF_2^2-2AF_1\cdot AF_2\cos\angle F_1AF_2$

$=4a^2+16a^2-2-2\cdot2a\cdot4a\left(-\dfrac{1}{2}\right)=28a^2$，即$4c^2=28a^2$，$\therefore e=\sqrt{7}$，选 D.

**二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9．已知函数$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$，则

A．函数$f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$为偶函数

B．曲线$y=f(x)$的对称轴为$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

C．$f(x)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增

D．$f(x)$的最小值为$-2$

【答案】AC

【解析】$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin 2x$，

$f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，$f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$为偶函数，A 对.



$2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，则$x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$f(x)$对称轴$x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$，B 错.

$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$，$\therefore f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)\nearrow$，而$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right)\subset\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right)\nearrow$，C 对；$f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$，D 错，选 AC.

10．已知复数$z$，$w$均不为0，则

A．$z^2=|z|^2$　　B．$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{|z|^2}$

C．$\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$　　D．$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

【答案】BCD

【解析】$z=i$，$z^2=-1\neq|z|^2=1$，A 错. $\frac{z^2}{|z|^2}=\frac{z^2}{z\cdot\bar{z}}=\frac{z}{\bar{z}}$，B 正确.

对于 C，$\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$，C 正确；对于 D，$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$，D 正确，选：BCD.

11．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，若$f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$，则

A．$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B．$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C．函数$f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是偶函数　　D．函数$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数

【答案】ABD

【解析】$x=0$，$y=\frac{1}{2}$时，$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)(1+f(0))=0$，

而$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，$\therefore f(0)=-1$，$x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$时，$f(0)+f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，A 对.

$f(x)$过$(0,-1)$，$\left(-\frac{1}{2},0\right)$，令$f(x)=kx+b$，则$\begin{cases}-1=b\\0=-\frac{1}{2}k+b\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}b=-1\\k=-2\end{cases}$，$f(x)=-2x-1$，

$f(x+y)+f(x)f(y)=-2(x+y)-1+(-2x-1)(-2y-1)=4xy$

满足条件，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，B 对.

$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=-2x$ 奇函数，C 错.

$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=-2x-2$ 减函数，D 对.

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12．已知集合 $A=\{-2,0,2,4\}$，$B=\{x||x-3|\le m\}$，若 $A\cap B=A$，则 $m$ 的最小值为________

【答案】5

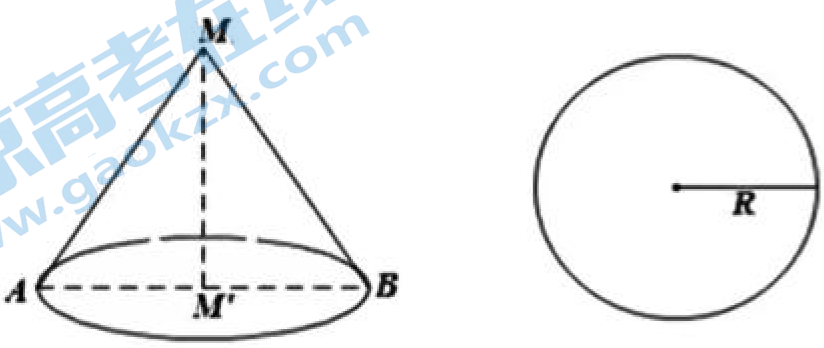
【解析】$A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$，$\therefore B=\{x|3-m\le x\le 3+m\}$，

$\therefore\begin{cases}3+m\ge 4\\3-m\le -2\end{cases}$，$\therefore m\ge 5$，$\therefore m_{\min}=5$.

13．已知轴截面为正三角形的圆锥 $MM'$ 的高与球 $O$ 的直径相等，则圆锥 $MM'$ 的体积与球 $O$ 的体积的比值是________，圆锥 $MM'$ 的表面积与球 $O$ 的表面积的比值是________.

【答案】$\frac{16}{3}$；4

【解析】设圆锥底面圆半径为 $r$，则高为 $\sqrt{3}r$，设球半径 $R$，




则 $2R=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$R=\frac{\sqrt{3}}{4}r$，$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\sqrt{3}r}{\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\right)^3}=\frac{16}{3}$（第一空）

圆锥的表面积$S_1=\pi r^2+\pi r\cdot 2r=3\pi r^2$，

球$O$的表面积$S_2=4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{3}{16}r^2=\frac{3}{4}\pi r^2$，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi r^2}{\frac{3}{4}\pi r^2}=4$（第二空）.

14．以$\max M$表示数集$M$中最大的数.设$0<a<b<c<1$，已知$b\geq 2a$或$a+b\leq 1$，则$\max\{b-a,c-b,1-c\}$的最小值为________.

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】令$b-a=m$，$c-b=n$，$1-c=p$，$m,n,p>0$，$\begin{cases}b=1-n-p\\a=1-m-n-p\end{cases}$

①若$b\geq 2a\Rightarrow 1-n-p\geq 2-2m-2n-2p\Rightarrow 2m+n+p\geq 1$

令$m=\max\{b-a,c-b,1-c\}=\max\{m,n,p\}$

$$\therefore\begin{cases}2M\geq 2m\\M\geq n\\M\geq p\end{cases}\Rightarrow 4M\geq 2m+n+p\geq 1\Rightarrow M\geq\frac{1}{4}.$$

②若$a+b\leq 1$，　　即$2-m-2n-2p\leq 1\Rightarrow m+2n+2p\geq 1$

令$M=\max\{m,n,p\}$，$\therefore\begin{cases}M\geq m\\2M\geq 2n\\2M\geq 2p\end{cases}\Rightarrow 5M\geq m+2n+2p\geq 1$，$\therefore M\geq\frac{1}{5}$

当$m=2n=2p$时，例如$c=\frac{4}{5}$，$b=\frac{3}{5}$，$a=\frac{2}{5}$时可取“=”，$\therefore(\text{原式})_{\min}=\frac{1}{5}$.

**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.（13分）已知函数$f(x)=\ln x+x^2+ax+2$在点$(2,f(2))$处的切线与直线$2x+3y=0$垂直.

（1）求$a$；

（2）求$f(x)$的单调区间和极值.



【解析】

直线$2x+3y=0$的斜率$-\frac{2}{3}$，$f(x)$在$(2,f(2))$处的切线与直线$2x+3y=0$垂直，

则$\left(\frac{9}{2}+a\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$，$\therefore a=-3$.

（2）$f(x)=\ln x+x^2-3x+2$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}=0$，$x=\frac{1}{2}$或1

$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)\nearrow$，$\left(\frac{1}{2},1\right)\swarrow$，$(1,+\infty)\nearrow$

$\therefore f(x)_{极大值}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$，$f(x)_{极小值}=f(1)=0$.

16.（15分）盒中有标记数字1，2，3，4的小球各2个，随机一次取出3个小球.

（1）求取出的3个小球上的数字两两不同的概率；

（2）记取出的3个小球上的最小数字为$X$，求$X$的分布列及数学期望$E(X)$.

**【解析】**

（1）$P=\frac{C_4^3\cdot C_2^1C_2^1C_2^1}{C_8^3}=\frac{4}{7}$.

（2）$X$的所有可能取值为1，2，3.

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{9}{14}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1}{C_8^3}=\frac{2}{7}$，

$P(X=3)=\frac{C_2^1C_2^2+C_2^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{1}{14}$.



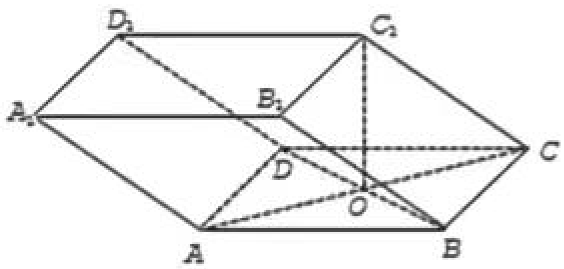
$\therefore X$的分布列如下：

$E(X)=\frac{9}{14}+\frac{4}{7}+\frac{3}{14}=\frac{10}{7}$.

17．（15 分）如图，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$O$ 为 $AC$ 与 $BD$ 的交点，$AA_1=2$，$\angle C_1CB=\angle C_1CD$，$\angle C_1CO=45°$.

（1）证明：$C_1O\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $B-AA_1-D$ 的正弦值.




**【解析】**

（1）证明：$\overrightarrow{C_1O}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CC_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$，

$\overrightarrow{C_1O}\cdot\overrightarrow{BD}=\left[\overrightarrow{CC_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})\right](\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$

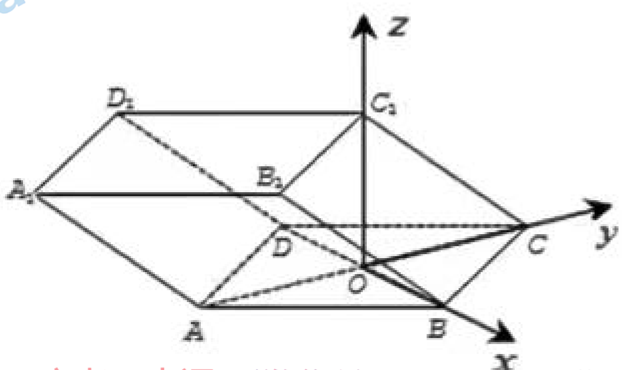
$=(\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CB})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{CB}^2)=0$，$\therefore C_1O\perp BD$，

而 $CC_1=2$，$CO=\sqrt{2}$，$\angle C_1CO=45°$，$\therefore C_1O=\sqrt{2}$，$\therefore C_1O^2+OC^2=CC_1^2$，

$\therefore C_1O\perp OC$，$\because BD\cap OC=O$，$\therefore C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

（2）如图建系，$\therefore B(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,-\sqrt{2},0)$，$C_1(0,0,\sqrt{2})$，$C(0,\sqrt{2},0)$，

$\therefore A_1(0,-2\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，






$\therefore\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

设平面 $AA_1B$ 与平面 $AA_1D$ 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\therefore\begin{cases}\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0\\-\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(1,-1,-1)\text{，}\begin{cases}-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}z_2=0\\-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$$

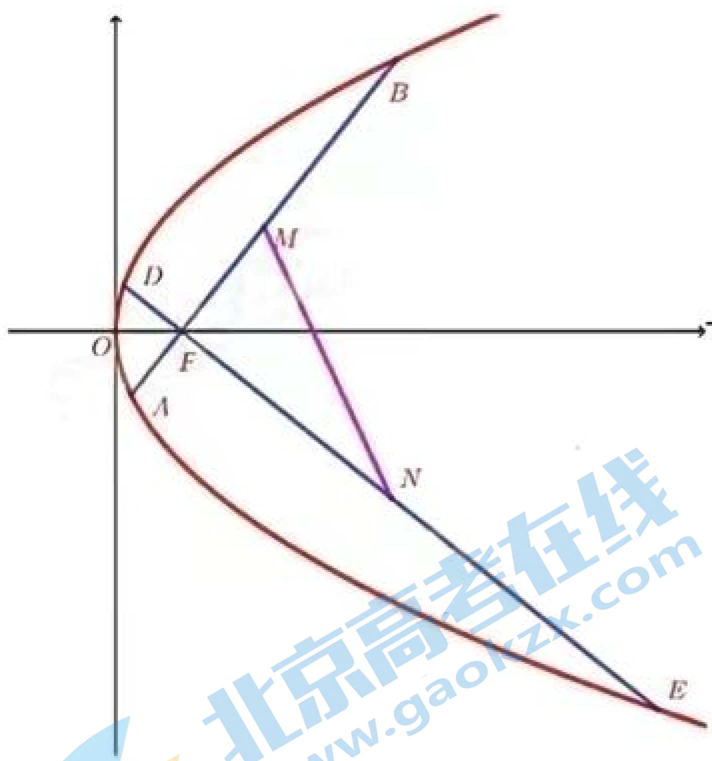
设 $B-AA_1-D$ 的平面角为 $\theta$，

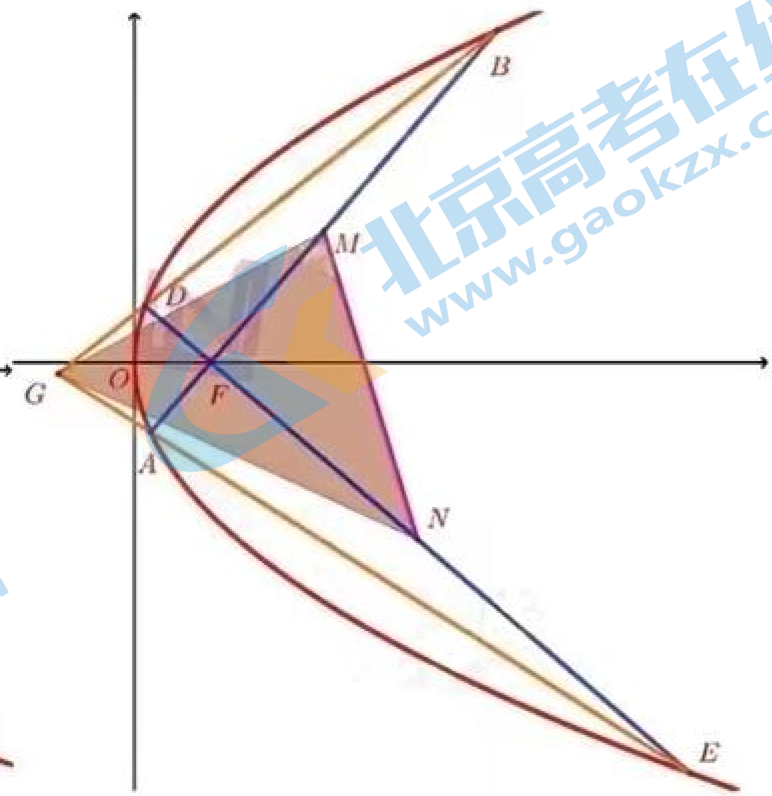
$$\therefore\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\text{，}\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

18．（17分）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过 $F$ 的直线 $l$ 交 $C$ 于 $A,B$ 两点，过 $F$ 与 $l$ 垂直的直线交 $C$ 于 $D$，$E$ 两点，其中 $B$，$D$ 在 $x$ 轴上方，$M$，$N$ 分别为 $AB$，$DE$ 的中点.

（1）证明：直线 $MN$ 过定点；

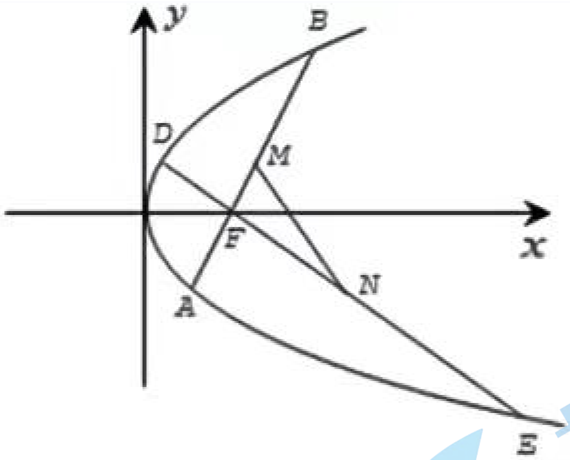
（2）设 $G$ 为直线 $AE$ 与直线 $BD$ 的交点，求 $\triangle GMN$ 面积的最小值.




【解析】

（1）设直线 $AB$ 的方程为 $x=my+1,m\neq0$，$A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，$M(x_0,y_0)$，$N(x_0',y_0')$




$\begin{cases} x = my+1 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 4 = 0$，$\therefore y_0 = \dfrac{y_1+y_2}{2} = 2m$，$\therefore x_0 = 2m^2+1$

$\therefore M(2m^2+1, 2m)$，$\because DE \perp AB$，$\therefore k_{DE} \cdot k_{AB} = -1$，$\therefore N\left(\dfrac{2}{m^2}+1, -\dfrac{2}{m}\right)$

$m \neq \pm 1$时，$\therefore k_{MN} = \dfrac{2m+\dfrac{2}{m}}{2m^2-\dfrac{2}{m^2}} = \dfrac{m+\dfrac{1}{m}}{\left(m+\dfrac{1}{m}\right)\left(m-\dfrac{1}{m}\right)} = \dfrac{m}{m^2-1}$

此时直线$MN$的方程为$y = \dfrac{m}{m^2-1}(x-2m^2-1)+2m = \dfrac{m}{m^2-1}x - \dfrac{3m}{m^2-1} = \dfrac{m}{m^2-1}(x-3)$

$MN$恒过定点$(3,0)$，当$m=\pm 1$时，　　显然$MN: x=3$也过$(3,0)$，

$\therefore$直线$MN$恒过定点$(3,0)$.

（2）设$D\left(\dfrac{y_3^2}{4}, y_3\right)$，$E\left(\dfrac{y_4^2}{4}, y_4\right)$，$k_{BD} = \dfrac{y_2-y_3}{\dfrac{y_2^2}{4}-\dfrac{y_3^2}{4}} = \dfrac{4}{y_2+y_3}$

直线$BD$方程为$y = \dfrac{4}{y_2+y_3}\left(x-\dfrac{y_2^2}{4}\right)+y_2 = \dfrac{4}{y_2+y_3}x + \dfrac{y_2y_3}{y_2+y_3}$

同理直线$AE$方程为$y = \dfrac{4}{y_1+y_4}x + \dfrac{y_1y_4}{y_1+y_4}$，$\begin{cases} y_1y_2 = -4 \\ y_3y_4 = -4 \end{cases}$

$$\therefore x_G = \frac{\dfrac{y_1y_4}{y_1+y_4} - \dfrac{y_2y_3}{y_2+y_3}}{\dfrac{4}{y_2+y_3} - \dfrac{4}{y_1+y_4}} = \frac{y_1y_4(y_2+y_3) - y_2y_3(y_1+y_4)}{4(y_1+y_4-y_2-y_3)}$$



$$= \frac{4(y_2+y_3-y_1-y_4)}{4(y_1+y_4-y_2-y_3)} = -1$$，

不妨设 $m>0$ ，$\therefore y_G=\dfrac{y_2y_3-4}{y_2+y_3}=\dfrac{2(m+\sqrt{m^2+1})\cdot 2\left(-\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\right)-4}{2\left(m-\frac{1}{m}+\sqrt{m^2+1}+\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\right)}=\dfrac{2(m-1)}{m+1}$

$G\left(-1,\dfrac{2(m-1)}{m+1}\right)$ 到 $MN$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\frac{-4m}{m^2-1}-\frac{2(m-1)}{m+1}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{m^2-1}\right)^2}}=\dfrac{\left|\frac{2m^2+2}{m^2-1}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{m^2-1}\right)^2}}$

$|MN|=\sqrt{1+\left(\dfrac{m}{m^2-1}\right)^2}\cdot\left|2m^2-\dfrac{2}{m^2}\right|$

$\therefore S_{\triangle GMN}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\left|m^2-\dfrac{1}{m^2}\right|\sqrt{1+\left(\dfrac{m}{m^2-1}\right)^2}\cdot\dfrac{\left|\frac{2m^2+2}{m^2-1}\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{m^2-1}\right)^2}}$

$=\left|\dfrac{m^4-1}{m^2}\cdot\dfrac{2(m^2+1)}{m^2-1}\right|=\dfrac{2(m^2+1)^2}{m^2}=\dfrac{2(m^4+2m^2+1)}{m^2}=2\left(m^2+\dfrac{1}{m^2}+2\right)\geq 8$ ，

当且仅当 $m=1$ 时可取“=”.

19．（17 分）离散对数在密码学中有重要的应用.设 $p$ 是素数，集合 $X=\{1,2,\cdots,p-1\}$ ，若 $u,v\in X$ ，$m\in\mathbf{N}$ ，记 $u\otimes v$ 为 $uv$ 除以 $p$ 的余数，$u^{m,\otimes}$ 为 $u^m$ 除以 $p$ 的余数；设 $a\in X$ ，$1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，若 $a^{n,\otimes}=b(n\in\{0,1,\cdots,p-2\})$ ，则称 $n$ 是以 $a$ 为底 $b$ 的离散对数，记为 $n=\log(p)_a b$.

（1）若 $p=11$ ，$a=2$ ，求 $a^{p-1,\otimes}$ ；

（2）对 $m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$ ，记 $m_1\otimes m_2$ 为 $m_1+m_2$ 除以 $p-1$ 的余数（当 $m_1+m_2$ 能被 $p-1$ 整除时，$m_1\otimes m_2=0$ ）.证明：$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$ ，其中 $b,c\in X$ ；

（3）已知 $n=\log(p)_a b$.对 $x\in X$ ，$k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$ ，令 $y_1=a^{k,\otimes}$ ，$y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$.证明：$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$.



【解析】

（1）$p=11$，$a=2$，$a^{p-1,\otimes}=2^{10,\otimes}$为$\frac{2^{10}}{11}$的余数为1，而$2^{10,\otimes}=1$，

$\therefore a^{p-1,\otimes}=1$.

（2）设$\log(p)_a b=m_1$，$\log(p)_a c=m_2$，

$\therefore a^{m_1}$除以$p$的余数为$b$，$a^{m_2}$除以$p$的余数为$c$，

$a^{m_1}=\lambda p+b$，$a^{m_2}=\mu p+c$，$m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，$\lambda,\mu\in\mathbf{N}$

$\Leftrightarrow$证：$\log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2$，

$$\frac{a^{m_1+m_2}}{p}=\frac{(\lambda p+b)(\mu p+c)}{p}=\frac{\lambda\mu p^2+(\lambda c+b\mu)p+bc}{p}$$

$a^{m_1+m_2}$除以$p$的余数为$bc$除以$p$的余数，即为$b\otimes c$

$\therefore \log(p)_a(b\otimes c)=m_1+m_2=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$.

（3）若$m$除以$n$的余数为$b$，　　　　　可记为$m\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$

由$n=\log(p)_a b$，$\therefore a^n\equiv b(\mathrm{mod}\,p)$，

$\therefore y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}\equiv y_2\cdot y_1^{n(p-2)}(\mathrm{mod}\,p)\equiv x\cdot b^k\cdot(a^k)^{n(p-2)}(\mathrm{mod}\,p)$

$=xa^{nk}\cdot a^{nk(p-2)}(\mathrm{mod}\,p)=x\cdot a^{nk(p-1)}(\mathrm{mod}\,p)=x(a^{p-1})^{nk}(\mathrm{mod}\,p)$（$\because a^{p-1}$除以$p$的余数为1）

$\equiv x\cdot 1^{nk}(\mathrm{mod}\,p)\equiv x(\mathrm{mod}\,p)$

$\because y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes},x\in\{1,2,\cdots,p-1\}$，$\therefore x=y_2\otimes y_1^{n(p-2)}$.

**锤子数学精彩秒杀：借助费马小定理**

（2）令$n=\log(p)_a(b\otimes c)$，$n_1=\log(p)_a b$，$n_2=\log(p)_a c$，则

$a^{n_1}=p^{m_1}+b$，$a^{n_2}=p^{m_2}+c$，其中$m_1,m_2\in\mathbf{N}$，

$\therefore a^{n_1+n_2}\equiv b\subset(\mathrm{mod}\,p)$，而$a^n\equiv b\otimes c(\mathrm{mod}\,p)\equiv bc(\mathrm{mod}\,p)$，

$\therefore a^n=a^{n_1+a_2}(\mathrm{mod}\,p)$，由费马定理，$a^{s(p-1)+t}\equiv a^t(\mathrm{mod}\,p)$

则$n=n_1+n_2$或$n=(n_1+n_2)+p-1$，



则$n=n_1\otimes n_2$，$\therefore\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$.