

北京四中 2019-2020 学年上学期高二数学期中测试卷

A 卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

1. 不等式 $\frac{x-3}{x+2} < 0$ 的解集为

A. $\{x | -2 < x < 3\}$

B. $\{x | x < -2\}$

C. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$

D. $\{x | x > 3\}$

【 】

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + n$, 且 $a_1 = 2$, 那么 $a_3 =$

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【 】

3. 下列命题中的假命题是

A. $\forall x \in R, x^3 > 0$

B. $\exists x \in R$, 使 $\tan x = 2$

C. $\forall x \in R, 2^x > 0$

D. $\exists x \in R$, 使 $\lg x = 0$

【 】

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1$, 公差 $d = 2$, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和等于

A. -15

B. -17

C. 15

D. 17

【 】

5. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中成立的是

A. $a^2 < b^2$

B. $\frac{a}{b} < 1$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

【 】

6. 设 $P: a^2 = 4, Q: a = 2$, 则 P 是 Q 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【 】

7. 若 $a, b \in R$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

【 】

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = -11, a_4 + a_6 = -6$ 则 S_n 取最小值时的 n 为 【 】

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

9. 函数 $y = \tan x + \frac{9}{\tan x} \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$ 的最大值为 【 】

A. 6

B. 9

C. -6

D. -9

10. 已知常数 $k \in (0, 1)$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n \cdot k^n (n \in N^*)$. 下面说法正确的是 【 】

① 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

② 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

③ 当 $\frac{1}{2} < k < 1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 不一定有最大项;

④ 当 $\frac{k}{k-1}$ 为正数时, 数列 $\{a_n\}$ 必有两项相等的最大项.

A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ③④

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 命题 " $\forall x \in R, x^2 - 1 > 0$ " 的否定是_____.

12. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $8a_2 - a_5 = 0$, 则公比 $q =$ _____, $\frac{S_4}{S_2} =$ _____.

13. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$, 则 $a+b$ 的最小值等于_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的对应关系如下表所示:

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = f(a_n)$, 则 $a_4 =$ _____, $a_{2019} =$ _____.

15. 能够说明“设 a, b, c 是任意实数, 若 $a > b > c$, 则 $a + b > c$.”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____.

三. 解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分)

16. 已知为等差数列 $\{a_n\}$, 且 $a_3 = 6, a_6 = 0$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3, b_2 = a_4 + a_5$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式.

17. (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - 4$.

(1) 当 $a = 3$ 时, 解不等式 $f(x) < 0$;

(2) 若不等式 $f(x) + 5 > 0$ 的解集为 R , 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且

$$b_2 = 3, b_3 = 81, a_1 = b_1, a_4 = b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

B 卷

一. 选择题 (本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

1. 若 $m < 0, n > 0$ 且 $m + n < 0$, 则

【 】

A. $m < -n < n < -m$

B. $-n < m < -m < n$

C. $m < -n < -m < n$

D. $-n < m < n < -m$

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 其公比 $q \neq 1$, 且 $b_n > 0 (n=1, 2, 3, \dots)$, 若 $a_1 = b_1, a_{11} = b_{11}$, 则 a_6 与 b_6 的大小关系为 【 】

A. $a_6 = b_6$

B. $a_6 > b_6$

C. $a_6 < b_6$

D. 不确定

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 4n + 3$, 则 $a_1 + a_{2020} =$ 【 】

A. 4043

B. 4046

C. 4047

D. 4049

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 4S_n - 3, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 =$ _____

5. 若 $a > 0, b > 0$, 则不等式 $-b < \frac{1}{x} < a$ 的解集是 _____

6. 已知 $a > b > 0$, 则 $a^2 - \frac{4}{b^2 - ab}$ 的最小值是 _____

7. 有穷数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*, n \leq 12)$ 满足 a_1, a_4, a_{12} 成等比数列, 且对 $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq k \leq 12$, 都有 $|a_k - a_{k-1}| = 1$,

若 $a_1 = 1, a_{12} = 4$, 则满足条件的不同数列 $\{a_n\}$ 的个数为 _____

二、解答题 (本大题共 2 小题, 共 22 分)

8. (本小题满分 10 分) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$, $f(-1) = -4$, 恒有 $f(x) \leq 6x + 2$, 数

列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$, 且 $0 < a_n < \frac{1}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调递增;

(3) 记 $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$, 若 $a_1 = \frac{1}{3}$, 求 $\prod_{i=1}^n (1 - 2a_i)$.

9. (本小题满分 12 分) 给定数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 对 $i=1, 2, 3, \dots, n-1$, 该数列前 i 项的最大值记为 A_i , 后 $n-i$

项 $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ 的最小值记为 $B_i, d_i = A_i - B_i$.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为 3, 4, 7, 1. 写出 d_1, d_2, d_3 的值;

(2) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 4)$ 是公比大于 1 的等比数列, 且 $a_1 > 0$.

证明: $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 是等比数列;

(3) 若 $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} = 0$, 证明: $\{a_n\}$ 是常数列