2023 北京昌平高一下（下）期末

数　学

2023.7

本试卷共 4 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

第一部分（选择题共 50 分）

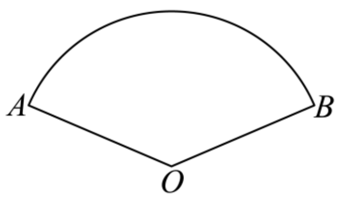
一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数 $\overline{z}=$（　）

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$

C. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 扇子具有悠久的历史，蕴含着丰富的数学元素.小明制作了一把如图所示的扇子，其半径为$16\mathrm{cm}$，圆心角为$\dfrac{3\pi}{4}$，则这把扇子的弧长为（　）



A. $6\pi\mathrm{cm}$　　B. $12\pi\mathrm{cm}$　　C. $18\pi\mathrm{cm}$　　D. $24\pi\mathrm{cm}$

3. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 均是单位向量，$|\vec{a}+\vec{b}|=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 已知角 α 的顶点与坐标原点 O 重合，始边落在 x 轴的非负半轴上，它的终边过点 $P(-3,4)$，则 $\tan(\pi+\alpha)=$（　）

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$A=30^{\circ},AC=\sqrt{3},AB=3$，则 $BC=$（　）

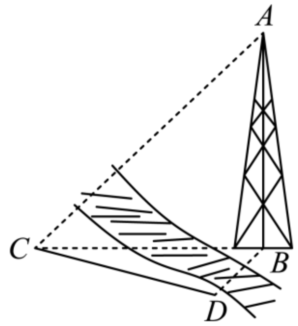
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

6. 下列函数中，是偶函数且其图象关于点 $(\dfrac{\pi}{4},0)$ 对称的是（　）

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=\cos x$

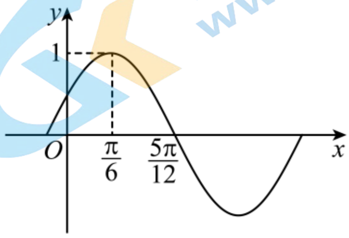
C. $f(x)=\sin 4x$　　D. $f(x)=\cos 2x$

7. 如图，测量河对岸的塔高 AB 此，选取与塔底 B 在同一水平面内的两个观测点 C 与 D, AB 垂直于平面 BCD .现测得 $\angle BCD=15^{\circ}, \angle BDC=120^{\circ}, CD=20\text{m}$，并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 45°，则塔高 $AB=$（　）



A. $\frac{20\sqrt{6}}{3}\text{m}$　　B. $10\sqrt{3}\text{m}$　　C. $10\sqrt{6}\text{m}$　　D. $20\sqrt{3}\text{m}$

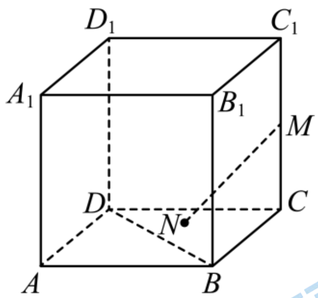
8. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，那么（　）



A. $\omega=\frac{1}{2}, \varphi=\frac{5\pi}{12}$　　B. $\omega=1, \varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=2, \varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=2, \varphi=\frac{\pi}{3}$

9. 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1, M$ 是 CC_1 的中点，N 是正方形 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，且 $MN\perp BD$，则线段 MN 长度的取值范围是（　）



A. $[1, 2\sqrt{2}]$　　B. $[1, 3]$　　C. $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{3}, 3]$

10. 在平面直角坐标系中，点 $A(\cos\alpha, \sin\alpha), B\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$，$P(\cos\beta, \sin\beta)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为（　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\cos65^{\circ}\cos20^{\circ}+\sin65^{\circ}\sin20^{\circ}$ 的值为__________.

12. 已知复数 $z_1=-2+\mathrm{i}, z_2=3+2\mathrm{i}$，则复数 z_1-z_2 在复平面内对应的点位于第__________象限.

13. 已知 a,b 是平面 α 外的两条不同直线.给出下列三个论断：

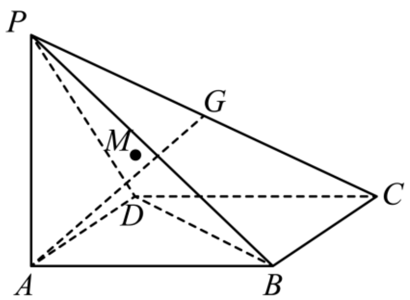
①$b//\alpha$；②$a\perp\alpha$；③$\vec{a}\perp\vec{b}$.

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________.

14. 已知正三角形 ABC 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 $\left|\overrightarrow{BP}\right|=$__________，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________.

15. 已知角 α,β 的顶点与坐标原点 O 重合，始边落在 x 轴的非负半轴上.角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后与角 β 的终边重合，且 $\cos(\alpha+\beta)=1$，则角 α 的一个取值为__________.

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD, PA=AB=1.G$ 为 PC 的中点，M 为 $\triangle PBD$ 内一动点（不与 P,B,D 三点重合）.给出下列四个结论：



①直线 BC 与 PD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$；② $AG\perp BM$；③ GM 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；④若 $AM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则点 M 的轨迹所围成图形的面积是 $\frac{\pi}{6}$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 已知向量 $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,2),|\vec{c}|=2\sqrt{5},\vec{c}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

（1）求 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角；

（2）求 $\vec{c}$ 的坐标.

18. 已知函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值及相应的 x 的取值

（3）若函数 $f(x)$ 在 $[m,\frac{\pi}{3}]$ 上是增函数，求 m 的最小值.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，$b\sin A=a\cos B, a=\sqrt{2}$.

（1）求 B；

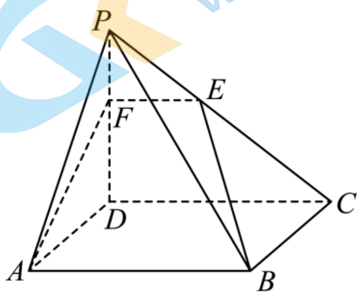
（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\cos A=-\frac{1}{2}$；

条件②：$b=\sqrt{5}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD=2, E$ 是棱 PC 上的动点（不与 P,C 重合），PD 交平面 ABE 于点 F.



（1）求证：$CD\,//$ 平面 ABE；

（2）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 ABE；

（3）若 E 是 PC 的中点，平面 ABE 将四棱锥 $P-ABCD$ 分成五面体 $PABEF$ 和五面体 $ABEFDC$，记它们的体积分别为 V_1,V_2，直接写出 $V_1:V_2$ 的值.

21. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $h(x)$ 满足：对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $h(x+2\pi)=h(x)+h(2\pi)$，则称函数 $h(x)$ 具有性质 P.

（1）判断函数 $f(x)=2x, g(x)=\cos x$ 是否具有性质 P；（直接写出结论）

（2）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\frac{3}{2}<\omega<\frac{5}{2},|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，判断是否存在 ω,φ，使函数 $f(x)$ 具有性质 P？若存在，求出 ω,φ 的值；若不存在，说明理由；

（3）设函数 $f(x)$ 具有性质 P，且在区间 $[0,2\pi]$ 上的值域为 $[f(0),f(2\pi)]$.函数 $g(x)=\sin(f(x))$，满足 $g(x+2\pi)=g(x)$，且在区间 $(0,2\pi)$ 上有且只有一个零点.求证：$f(2\pi)=2\pi$.

参考答案

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】先利用复数的除法得到复数 z，再求共轭复数.

【详解】解：因为复数 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，

所以 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$，

故选：B

2.【答案】B

【分析】根据给定条件，利用弧长公式计算作答.

【详解】因为扇形半径为 $16\mathrm{cm}$，圆心角为 $\frac{3\pi}{4}$，所以弧长为 $\frac{3\pi}{4}\times 16\mathrm{cm}=12\pi\mathrm{cm}$.

故选：B

3.【答案】D

【分析】将 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$ 两边平方，再根据数量积得运算律即可得解.

【详解】因为 $\vec{a},\vec{b}$ 均是单位向量，所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，

又 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$，则 $(\vec{a}+\vec{b})^2=4$，

即 $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

故选：D

4.【答案】A

【分析】利用诱导公式，结合三角函数定义求解作答.

【详解】依题意，$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，所以 $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

故选：A

5.【答案】C

【分析】直接利用余弦定理求解即可.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，$A=30^\circ, AC=\sqrt{3}, AB=3$，

由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=3+9-2\times\sqrt{3}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，

所以 $BC=\sqrt{3}$.

故选：C.

6.【答案】D

【分析】利用偶函数排除两个选项，再由对称性判断作答.

【详解】对于 A，函数 $f(x)=\sin x$ 是奇函数，A 不是；

对于 C，函数 $f(x)=\sin 4x$ 是奇函数，C 不是；

对于 B，函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数，而 $f(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq0$，即 $f(x)=\cos x$ 的图象不关于点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称，B 不是；

对于 D，函数 $f(x)=\cos 2x$ 是偶函数，$f(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{2}=0$，即 $f(x)=\cos 2x$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称，D 是.

故选：D

7.【答案】C

【分析】根据给定条件，利用正弦定理，结合等腰三角形的性质求解作答.

【详解】在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BCD=15^\circ,\angle BDC=120^\circ,CD=20\text{m}$，则 $\angle CBD=45^\circ$，

由正弦定理得：$\frac{BC}{\sin\angle CDB}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，于是 $BC=\frac{20\sin120^\circ}{\sin45^\circ}=\frac{20\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{6}$，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ,\angle ACB=45^\circ$，因此 $AB=BC=10\sqrt{6}$，

所以塔高 $AB=10\sqrt{6}\text{m}$

故选：C

8.【答案】C

【分析】根据周期可得 $\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\times4=T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=2$，利用最值点即可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

【详解】根据图象可知 $\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\times4=T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=2$，

将 $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$ 代入 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1\Rightarrow\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$，

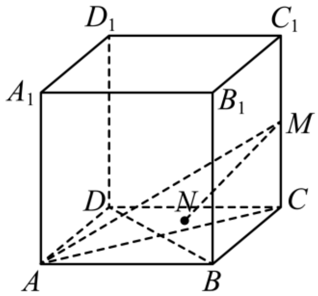
所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$，由于 $0<\varphi<\pi$，所以取 $k=0$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

故选：C

9.【答案】B

【分析】根据给定条件，确定点 N 的轨迹，再求出 MN 的范围作答.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 AC, AM，如图，



显然 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$， $BD \subset$ 平面 $ABCD$，则 $CC_1 \perp BD$，又 $AC \perp BD$，

且 $AC \cap CC_1 = C, AC, CC_1 \subset$ 平面 ACM，因此 $BD \perp$ 平面 ACM，

而点 $M \in$ 平面 ACM，且 $MN \perp BD$，于是 $MN \subset$ 平面 ACM，点 $N \in$ 平面 ACM，

又点 $N \in$ 平面 $ABCD$，平面 $ACM \cap$ 平面 $ABCD = AC$，因此点 N 在线段 AC 上，

在 $\triangle ACM$ 中，$\angle ACM = 90^\circ$，则 $CM \le MN \le AM$，由于 M 是 CC_1 的中点，

从而 $CM = 1, AM = \sqrt{CM^2 + AC^2} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$，

所以线段 MN 长度的取值范围是 $[1,3]$.

故选：B

10.【答案】B

【分析】根据向量数量积的坐标运算，结合三角恒等变换，即可由三角函数的有界性求解最值.

【详解】由 $A(\cos\alpha, \sin\alpha), B\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$， $P(\cos\beta, \sin\beta)$ 可得

$$\overrightarrow{AB} = \left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\alpha, \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\alpha\right) = \left(-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right), \overrightarrow{AP} = (\cos\beta-\cos\alpha, \sin\beta-\sin\alpha)$$

，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = -\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)(\cos\beta-\cos\alpha)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)(\sin\beta-\sin\alpha)$

$= \sin\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \sin\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

故当 $\sin\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取最大值 $\frac{3}{2}$，

故选：B

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$##$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【分析】根据余弦的和差角公式即可求解.

【详解】$\cos 65^{\circ}\cos 20^{\circ}+\sin 65^{\circ}\sin 20^{\circ}=\cos\left(65^{\circ}-20^{\circ}\right)=\cos 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 【答案】三

【分析】先求出 z_1-z_2，然后求出其在复平面对应的坐标，从而可得答案

【详解】因为 $z_1=-2+\mathrm{i}, z_2=3+2\mathrm{i}$，

所以 $z_1-z_2=-2+\mathrm{i}-(3+2\mathrm{i})=-5-\mathrm{i}$，

所以复数 z_1-z_2 在复平面内对应的点为 $(-5,-1)$，位于第三象限，

故答案为：三

13. 【答案】①②⇒③

【分析】根据空间直线和平面平行垂直的判定定理及性质定理推理得出结论.

【详解】若①②⇒③，

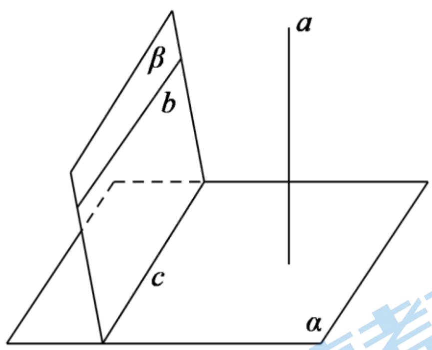
理由：设过 b 有一个平面 β，使得 $\beta\cap\alpha=c$，

$\because b//\alpha$，$b\subset\beta$，$\beta\cap\alpha=c$，

$\therefore b//c$，

又 $a\perp\alpha$，$c\subset\alpha$，可得 $a\perp c$，

又 $b//c$，$\therefore \vec{a}\perp\vec{b}$.



若①③⇒②，

由 $b//\alpha$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，可得 $a//\alpha$ 或 a 与 α 相交或 $a\subset\alpha$，

故①③不能推出②.

若②③⇒①，

由 $a\perp\alpha$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，可得 $b//\alpha$ 或 $b\subset\alpha$，

故②③不能推出①.

故答案为：①②⇒③.

14.【答案】 ①. 1 ②. 3

【分析】由向量等式可得 P 为 BC 边的中点，由此求解作答.

【详解】正 $\triangle ABC$ 的边长为 2，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则点 P 为 BC 边的中点，所以 $\left|\overrightarrow{BP}\right|=1$，

$\angle CAP=30^\circ$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

故答案为：1；3

15.【答案】$-\frac{3\pi}{8}$

【分析】利用终边相同的角可得 $\beta=\alpha+\frac{3\pi}{4}$，再借助余弦函数的性质求解作答.

【详解】依题意，$\beta=\alpha+\frac{3\pi}{4}$，因此 $\cos(\alpha+\beta)=\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{4})=1$，则 $2\alpha+\frac{3\pi}{4}=2k\pi,k\in Z$，

解得 $\alpha=k\pi-\frac{3\pi}{8},k\in Z$，当 $k=0$ 时，$\alpha=-\frac{3\pi}{8}$，

所以角 α 的一个取值为 $-\frac{3\pi}{8}$.

故答案为：$-\frac{3\pi}{8}$

16.【答案】①②④

【分析】根据异面直线所成的角即可判断①，根据空间中的垂直关系转化即可证明 $AG\perp$ 平面 PBD，即可求证线线垂直进而判断②，根据点到面的距离为最小值，利用等体积法即可求解③，根据圆的面积即可判断④.

【详解】由于 $BC//AD$，所以 $\angle PDA$ 即为直线 BC 与 PD 所成的角或其补角，

由于 $PA\perp$ 底面 $ABCD, AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，又 $PA=AD=1$，所以 $\angle PDA=\frac{\pi}{4}$，①正确；

由于 $PA\perp$ 底面 $ABCD, CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，

又 $AD\perp CD$，$PA\cap AD=A, PA, AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD，

取 PD 中点为 N，连接 NA, NG，

由于 G 为 PC 的中点，所以 $NG//CD$，所以 $NG\perp$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD，则 $NG\perp PD$，

又 $PA=AD=1$，PD 中点为 N，所以 $PD\perp AN$，

$AN\cap NG=N, AN, NG\subset$ 平面 ANG，所以 $PD\perp$ 平面 ANG，$AG\subset$ 平面 ANG，则 $PD\perp AG$，

$AC \perp BD, BD \perp PA, PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC，所以 $BD \perp$ 平面 PAC , $AG \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BD \perp AG$,

$PD \cap BD = D, PD, BD \subset$ 平面 PBD，所以 $AG \perp$ 平面 PBD , $MB \subset$ 平面 PBD ,

所以 $AG \perp BM$ ，故②正确；

当 $GM \perp$ 平面 PBD 时，GM 最小，设此时点 G 到平面 PBD 的距离为 h ,

$$V_{G-PBD} = V_{D-PBG} = \frac{1}{2}V_{D-PBC} = \frac{1}{2}V_{P-DBC} = \frac{1}{4}V_{P-ABCD} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{12},$$

所以 $V_{G-PBD} = \frac{1}{3}S_{\triangle PBD} \cdot h = \frac{1}{12}$,

由于 $PD = DB = PB = \sqrt{AD^2 + PA^2} = \sqrt{2}$，故 $\triangle PBD$ 为等边三角形，$S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $V_{G-PBD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{1}{12} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}$，故③错误；

由③得点 G 到平面 PBD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$，不妨设 G 在平面 PBD 的投影为 H ,

所以点 C 到平面 PBD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

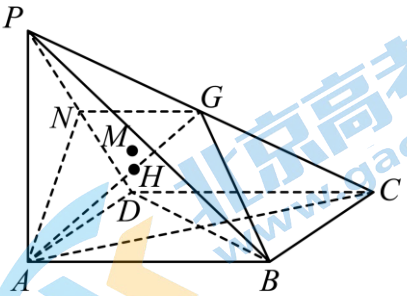
由于 AC 被 BD 平分，所以 A 到平面 PBD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

由②知 $AG \perp$ 平面 PBD，所以 A, H, G 三点共线，即 $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

因此点 M 的轨迹围成的图形是以点 H 为圆心，以 HM 为半径的圆，所以面积为 $\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{6}$，故④正确.

故答案为：①②④



【点睛】方法点睛：本题考查立体几何中线面垂直关系的证明、异面直线所成角和点到面的距离的求解、截面面积的求解问题；求解点到面的距离的常用方法是采用体积桥的方式，将问题转化为三棱锥高的问题

的求解或者利用坐标系，由法向量法求解..

三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.【答案】（1）$\dfrac{\pi}{4}$；

（2）$\vec{c}=(2,4)$ 或 $\vec{c}=(-2,-4)$.

【分析】（1）利用数量积和模求出向量夹角作答.

（2）设出 $\vec{c}$ 的坐标，利用给定条件列式求解作答.

【小问 1 详解】

向量 $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+1\times2=5$，$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

因此 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而 $0\le\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le\pi$，则 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

【小问 2 详解】

设 $\vec{c}=(x,y)$，而 $\vec{a}-\vec{b}=(2,-1)$，由 $\vec{c}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，得 $\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=2x-y=0$，即 $y=2x$，

由 $|\vec{c}|=2\sqrt{5}$，得 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{5}$，联立解得 $x=2,y=4$ 或 $x=-2,y=-4$，

所以 $\vec{c}=(2,4)$ 或 $\vec{c}=(-2,-4)$.

18.【答案】（1）π；

（2）$f(x)_{\max}=1$，$x=\dfrac{5\pi}{12}$；

（3）$-\dfrac{\pi}{12}$.

【分析】（1）利用二倍角公式及辅助角公式化简函数，再利用正弦函数周期公式求解作答.

（2）利用（1）中解析式，求出相位所在区间，结合正弦函数性质求解作答.

（3）求出 $f(x)$ 的单调递增区间，再借助集合包含关系列式作答.

【小问 1 详解】

依题意，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 x-1)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$-\dfrac{\pi}{3}\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{2\pi}{3}$，

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 取得最大值 1，

所以 $f(x)_{\max}=1$，$x=\frac{5\pi}{12}$.

【小问 3 详解】

由（1）知，$f\left(x\right)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$，即函数 $f\left(x\right)$ 在 $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in Z)$ 上单调递增，

因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $[m,\frac{\pi}{3}]$ 上是增函数，则 $k=0,[m,\frac{\pi}{3}]\subseteq[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$，因此 $-\frac{\pi}{12}\le m<\frac{\pi}{3}$，

所以 m 的最小值是 $-\frac{\pi}{12}$.

19. 【答案】（1）$B=\frac{\pi}{4}$

（2）选① $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$；选② $\frac{3}{2}$

【分析】（1）利用正弦定理化边为角，即可得解；

（2）选①，先利用平方关系求出 $\sin A$，结合已知求出 b，再根据两角和得正弦公式求出 $\sin C$，再根据三角形的面积公式即可得解.

选②，先求出 $\sin A,\cos A$，再根据两角和得正弦公式求出 $\sin C$，再根据三角形的面积公式即可得解.

【小问 1 详解】

因为 $b\sin A=a\cos B$，

由正弦定理得 $\sin B\sin A=\sin A\cos B$，

又 $\sin A\neq 0$，所以 $\tan B=1$，

又 $B\in\left(0,\pi\right)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；

【小问 2 详解】

选①，因为 $\cos A=-\frac{1}{2},A\in\left(0,\pi\right)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$，

由 $b\sin A=a\cos B,a=\sqrt{2}$，

得 $b=\frac{a\cos B}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

则 $\sin C=\sin\left(A+B\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

选②，$b\sin A=a\cos B,a=\sqrt{2},b=\sqrt{5}$，

得 $\sin A=\frac{a\cos B}{b}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $A<\frac{\pi}{4}$，

则 $\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin C=\sin\left(A+B\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{2}$.

20.【答案】（1）证明见解析　（2）证明见解析

（3）$V_1:V_2=3:5$

【分析】（1）由线面平行的判定定理可证；

（2）由线面垂直的性质定理和判定定理先得 $AB\perp$ 平面 PAD，再由面面垂直的判定定理得证；

（3）连结 AE、DE，将五面体 $ABEFDC$ 分割成三棱锥 $E-ADF$ 和四棱锥 $E-ABCD$，分别求出体积，可求 V_2，再由 $V_1=V_{四棱锥P-ABCD}-V_2$，可解此题.

【小问 1 详解】

由底面 $ABCD$ 是正方形，知 $CD\parallel AB$，

又 $CD\not\subset$ 平面 ABE，$AB\subset$ 平面 ABE，

所以 $CD\parallel$ 平面 ABE；

【小问 2 详解】

由底面 $ABCD$ 是正方形，可知 $AB\perp AD$，

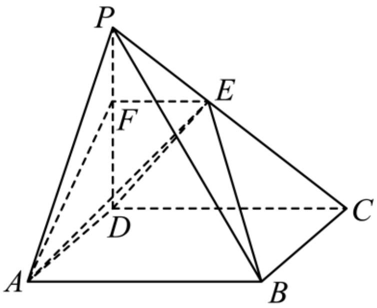
又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB\perp PD$，

$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$PD\subset$ 平面 $ABCD$，且 $AD\cap PD=D$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD，又 $AB\subset$ 平面 ABE，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 ABE；

【小问 3 详解】



连结 AE、DE，

由（1）$CD \parallel$ 平面 ABE，$CD \subset$ 平面 PCD，平面 $ABE \cap$ 平面 $PCD = EF$，

得 $EF \parallel CD$，即 $EF \parallel AB$，

又由（2）$AB \perp$ 平面 PAD，可得 $EF \perp$ 平面 PAD，

由题意，E 是 PC 的中点，

$$V_2 = V_{五面体ABEFDC} = V_{三棱锥E-ADF} + V_{四棱锥E-ABCD}$$

$$= \frac{1}{3}S_{\triangle ADF} \cdot EF + \frac{1}{3}S_{正方形ABCD} \cdot FD$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{5}{3},$$

又 $V_{四棱锥P-ABCD} = \frac{1}{3}S_{正方形ABCD} \cdot PD = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$，

所以 $V_1 = V_{四棱锥P-ABCD} - V_2 = 1$，

$V_1 : V_2 = 1 : \frac{5}{3} = 3:5$.

21.【答案】（1）函数 $f(x) = 2x$ 具有性质 P；$g(x) = \cos x$ 不具有性质 P.

（2）$\omega = 2$，$\varphi = 0$

（3）证明见解析

【分析】（1）利用定义判断即可；

（2）假设函数 $f(x)$ 具有性质 P，可求出 $\varphi = 0$，进而可得 $\omega = 2$，从而可得 $f(x) = \sin 2x$，再根据定义进行验证，即可得到答案；

（3）由由函数 $f(x)$ 具有性质 P 及（2）可知，$f(0) = 0$，进而可得 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 的值域为 $[0, k\pi]$，$k \in \mathrm{Z}$ 且 $k > 0$，由 $g(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上有且只有一个零点可证明当 $k > 2$ 时不符合题意，再求解当 $k = 1$ 时与 $g(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数矛盾，从而可得 $k = 2$，即可证明.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = 2x$，则 $f(x + 2\pi) = 2(x + 2\pi) = 2x + 4\pi$，又 $f(2\pi) = 4\pi$，

所以 $f\left(x+2\pi\right)=f(x)+f(2\pi)$，故函数 $f\left(x\right)=2x$ 具有性质 P；

因为 $g\left(x\right)=\cos x$，则 $g\left(x+2\pi\right)=\cos(x+2\pi)=\cos x$，又 $g\left(2\pi\right)=\cos 2\pi=1$，

$g(x)+g(2\pi)=\cos x+1\neq g(x+2\pi)$，故 $g\left(x\right)=\cos x$ 不具有性质 P.

【小问 2 详解】

若函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P，则 $f\left(0+2\pi\right)=f(0)+f(2\pi)$，即 $f(0)=\sin\varphi=0$，

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=0$，所以 $f\left(x\right)=\sin(\omega x)$；

若 $f(2\pi)\neq 0$，不妨设 $f(2\pi)>0$，由 $f\left(x+2\pi\right)=f(x)+f(2\pi)$，

得 $f\left(2k\pi\right)=f(0)+kf(2\pi)=kf(2\pi)(k\in\mathrm{Z})$（*），

只要 k 充分大时，$kf(2\pi)$ 将大于 1，而 $f\left(x\right)$ 的值域为 $[-1,1]$，

故等式（*）不可能成立，所以必有 $f(2\pi)=0$ 成立，

即 $\sin(2\omega\pi)=0$，因为 $\dfrac{3}{2}<\omega<\dfrac{5}{2}$，所以 $3\pi<2\omega\pi<5\pi$，

所以 $2\omega\pi=4\pi$，则 $\omega=2$，此时 $f\left(x\right)=\sin 2x$，

则 $f\left(x+2\pi\right)=\sin 2(x+2\pi)=\sin 2x$，

而 $f(x)+f(2\pi)=\sin 2x+\sin 4\pi=\sin 2x$，即有 $f\left(x+2\pi\right)=f(x)+f(2\pi)$ 成立，

所以存在 $\omega=2$，$\varphi=0$ 使函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P.

【小问 3 详解】

证明：由函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 P 及（2）可知，$f(0)=0$，

由 $g\left(x+2\pi\right)=g\left(x\right)$ 可知函数 $g\left(x\right)$ 是以 2π 为周期的周期函数，则 $g\left(2\pi\right)=g(0)$，

即 $\sin(f(2\pi))=\sin(f(0))=0$，所以 $f(2\pi)=k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$；

由 $f(0)=0$，$f(2\pi)=k\pi$ 以及题设可知，

函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 的值域为 $\left[0,k\pi\right]$，所以 $k\in\mathrm{Z}$ 且 $k>0$；

当 $k>2$，$f\left(x\right)=\pi$ 及 $f\left(x\right)=2\pi$ 时，均有 $g\left(x\right)=\sin\left(f\left(x\right)\right)=0$，

这与 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,2\pi\right)$ 上有且只有一个零点矛盾，因此 $k=1$ 或 $k=2$；

当 $k=1$ 时，$f(2\pi)=\pi$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 的值域为 $\left[0,\pi\right]$，

此时函数 $g\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,1\right]$，

而 $f\left(x+2\pi\right)=f(x)+\pi$，于是函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[2\pi,4\pi\right]$ 的值域为 $\left[\pi,2\pi\right]$，

此时函数 $g\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-1,0\right]$，

函数 $g(x)=\sin(f(x))$ 在当 $x\in[0,2\pi]$ 时和 $x\in[2\pi,4\pi]$ 时的取值范围不同，

与函数 $g(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数矛盾，

故 $k=2$，即 $f(2\pi)=2\pi$，命题得证.

【点睛】关键点睛：本题考查了函数新定义问题，解决此类问题，关键是读懂题意，理解新定义的本质，把新情境下的概念、法则、运算化归到常规的数学背景中，运用相关的数学公式、定理、性质进行解答即可.