2016年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分40分） 设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$ 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2 (i=1,2,\cdots,2015)$.

求 $(a_1-a_2^2)\cdot(a_2-a_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{2015}-a_{2016}^2)\cdot(a_{2016}-a_1^2)$ 的最大值.

解　令 $P=(a_1-a_2^2)\cdot(a_2-a_3^2)\cdot\cdots\cdot(a_{2015}-a_{2016}^2)\cdot(a_{2016}-a_1^2)$.

由已知得，对 $i=1,2,\cdots,2015$，均有 $a_i-a_{i+1}^2>\frac{11}{9}a_{i+1}^2-a_{i+1}^2\ge 0$.

若 $a_{2016}-a_1^2\le 0$，则 $S\le 0$.　　　　……………………10分

以下考虑 $a_{2016}-a_1^2>0$ 的情况. 约定 $a_{2017}=a_1$. 由平均不等式得

$$P^{\frac{1}{2016}}\le\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}(a_i-a_{i+1}^2)=\frac{1}{2016}\left(\sum_{i=1}^{2016}a_i-\sum_{i=1}^{2016}a_{i+1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2016}\left(\sum_{i=1}^{2016}a_i-\sum_{i=1}^{2016}a_i^2\right)=\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}a_i(1-a_i)$$　……………………20分

$$\le\frac{1}{2016}\sum_{i=1}^{2016}\left(\frac{a_i+(1-a_i)}{2}\right)^2=\frac{1}{2016}\cdot 2016\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

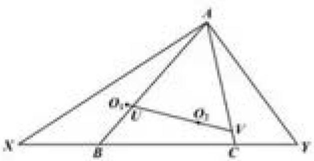
所以
$$P\le\frac{1}{4^{2016}}.$$　……………………30分

当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2016}=\frac{1}{2}$ 时，上述不等式等号成立，且有 $9a_i>11a_{i+1}^2$ $(i=1,2,\cdots,2015)$，此时 $P=\frac{1}{4^{2016}}$.

综上所述，所求最大值为 $\frac{1}{4^{2016}}$.　　　　……………………40分

二、（本题满分40分） 如图所示，在△ABC 中，X,Y 是直线 BC 上两点（X,B,C,Y 顺次排列），使得
$$BX\cdot AC=CY\cdot AB.$$
设△ACX，△ABY 的外心分别为 O_1,O_2，直线 O_1O_2 与 AB,AC 分别交于点 U,V.

证明：△AUV 是等腰三角形.



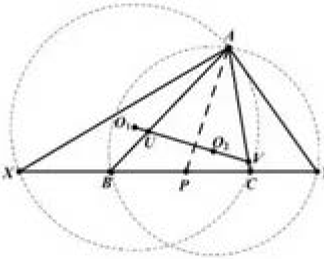
证法一 作$\angle BAC$的内角平分线交BC于点P．设三角形ACX和ABY的外接圆分别为ω_1和ω_2．由内角平分线的性质知，$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{AB}{AC}$．由条件可得$\dfrac{BX}{CY}=\dfrac{AB}{AC}$．从而

$$\frac{PX}{PY}=\frac{BX+BP}{CY+CP}=\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CP},$$

即$CP\cdot PX=BP\cdot PY$．　…………………20 分

故P对圆ω_1和ω_2的幂相等，所以P在ω_1和ω_2的根轴上．　……………30 分

于是$AP\perp O_1O_2$，这表明点U,V关于直线AP对称，从而三角形AUV是等腰三角形．　…………………40 分



证法二 设$\triangle ABC$的外心为O，连接OO_1,OO_2．过点O,O_1,O_2分别作直线BC的垂线，垂足分别为D,D_1,D_2．作$O_1K\perp OD$于点K．

我们证明$OO_1=OO_2$．在直角三角形OKO_1中，

$$OO_1=\frac{O_1K}{\sin\angle O_1OK}.$$

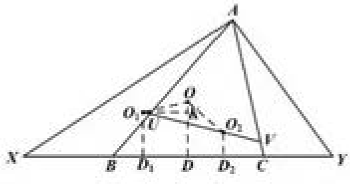
由外心的性质，$OO_1\perp AC$．又$OD\perp BC$，故$\angle O_1OK=\angle ACB$．

而D,D_1分别是BC,CX的中点，所以$DD_1=CD_1-CD=\dfrac{1}{2}CX-\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}BX$．因此

$$OO_1=\frac{O_1K}{\sin\angle O_1OK}=\frac{DD_1}{\sin\angle ACB}=\frac{\frac{1}{2}BX}{\frac{AB}{2R}}=R\cdot\frac{BX}{AB},$$

这里R是$\triangle ABC$的外接圆半径．同理$OO_2=R\cdot\dfrac{CY}{AC}$．　…………………10 分

由已知条件可得$\dfrac{BX}{AB}=\dfrac{CY}{AC}$，故$OO_1=OO_2$．　…………………20 分



由于$OO_1\perp AC$，所以$\angle AVU=90^\circ-\angle OO_1O_2$．同理$\angle AUV=90^\circ-\angle OO_2O_1$．
…………………30 分

又因为$OO_1=OO_2$，故$\angle OO_1O_2=\angle OO_2O_1$，从而$\angle AUV=\angle AVU$．这样$AU=AV$，即$\triangle AUV$是等腰三角形．　…………………40 分

三、（本题满分 50 分） 给定空间中 10 个点，其中任意四点不在一个平面上．将某些点之间用线段相连，若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形，试确定所连线段数目的最大值．

解 以这 10 个点为顶点，所连线段为边，得到一个 10 阶简单图G．我们证明G的边数不超过 15．

设G的顶点为$v_1,v_2,\cdots,v_{10}$，共有k条边，用$\deg(v_i)$表示顶点v_i的度．若$\deg(v_i)\le 3$对$i=1,2,\cdots,10$都成立，则

$$k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\deg(v_i)\le\frac{1}{2}\times 10\times 3=15.$$

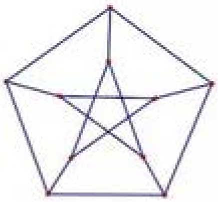
假设存在v_i满足$\deg(v_i)\ge 4$．不妨设$\deg(v_1)=n\ge 4$，且v_1与$v_2,\cdots,v_{n+1}$均相邻．于是$v_2,\cdots,v_{n+1}$之间没有边，否则就形成三角形．所以，$v_1,v_2,\cdots,v_{n+1}$之间恰有n条边． …………10 分

对每个j（$n+2\le j\le 10$），v_j至多与$v_2,v_3,\cdots,v_{n+1}$中的一个顶点相邻（否则设v_j与$v_s,v_t\left(2\le s<t\le n+1\right)$相邻，则$v_1,v_s,v_j,v_t$就对应了一个空间四边形的四个顶点，这与题设条件矛盾．），从而$v_2,\cdots,v_{n+1}$与$v_{n+2},\cdots,v_{10}$之间的边数至多$10-(n+1)=9-n$条． …………20 分

在$v_{n+2},\cdots,v_n$这$9-n$个顶点之间，由于没有三角形，由托兰定理，至多

$\left[\frac{(9-n)^2}{4}\right]$条边．因此$G$的边数

$$k\le n+(9-n)+\left[\frac{(9-n)^2}{4}\right]=9+\left[\frac{(9-n)^2}{4}\right]\le 9+\left[\frac{25}{4}\right]=15. \quad \cdots\cdots 30\text{ 分}$$



如图给出的图共有 15 条边，且满足要求．

综上所述，所求边数的最大值为 15． ……………………50 分

四、（本题满分 50 分） 设p与$p+2$均是素数，$p>3$．数列$\{a_n\}$定义为$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\left\lceil\frac{pa_{n-1}}{n}\right\rceil$，$n=2,3,\cdots$．这里$\lceil x\rceil$表示不小于实数$x$的最小整数．

证明：对$n=3,4,\cdots,p-1$均有$n\mid pa_{n-1}+1$成立．

证明 首先注意，$\{a_n\}$是整数数列．

对n用数学归纳法．当$n=3$时，由条件知$a_2=2+p$，故$pa_2+1=\left(p+1\right)^2$．因$p$与$p+2$均是素数，且$p>3$，故必须$3\mid p+1$．因此$3\mid pa_2+1$，即$n=3$时结论成立．

对 $3<n\le p-1$，设对 $k=3,\cdots,n-1$ 成立 $k\mid pa_{k-1}+1$，此时 $\left\lceil\dfrac{pa_{k-1}}{k}\right\rceil=\dfrac{pa_{k-1}+1}{k}$，

故
$$pa_{k-1}+1=p\left(a_{k-2}+\left\lceil\frac{pa_{k-2}}{k-1}\right\rceil\right)+1=p\left(a_{k-2}+\frac{pa_{k-2}+1}{k-1}\right)+1$$
$$=\frac{(pa_{k-2}+1)(p+k-1)}{k-1}.$$
……………………10 分

故对 $3<n\le p-1$，有

$$pa_{n-1}+1=\frac{p+n-1}{n-1}(pa_{n-2}+1)=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}(pa_{n-3}+1)$$
$$=\cdots=\frac{p+n-1}{n-1}\cdot\frac{p+n-2}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{p+3}{3}(pa_2+1),$$
………20 分

因此
$$pa_{n-1}+1=\frac{2n(p+1)}{(p+n)(p+2)}C_{p+n}^{n}.$$

由此知（注意 C_{p+n}^{n} 是整数）
$$n\mid(p+n)(p+2)(pa_{n-1}+1).\qquad ①$$
……………………40 分

因 $n<p$，p 素数，故 $(n,n+p)=(n,p)=1$，又 $p+2$ 是大于 n 的素数，故 $(n,p+2)=1$，从而 n 与 $(p+n)(p+2)$ 互素，故由①知 $n\mid pa_{n-1}+1$．由数学归纳法知，本题得证．……………………50 分