

2019 北京师大附中高二（上）期末

数 学

一、选择题：本大题共 15 小题，每小题 3 分，共 45 分。

1. 已知集合 $M = \{1, 2\}$ ，集合 $N = \{0, 1, 3\}$ ，则 $M \cap N =$

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1\}$

2. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$ ，则 $f(x)$ 的定义域是（ ）

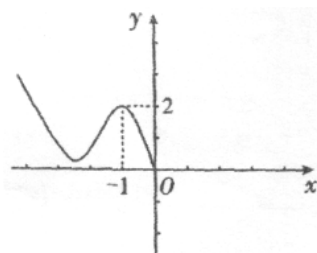
- A. $[-1, 2)$ B. $[-1, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

3. 函数 $y = x^2$ ， $y = x^3$ ， $y = (\frac{1}{2})^x$ ， $y = \lg x$ 中，在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数的是

- A. $y = x^2$ B. $y = x^3$ C. $y = (\frac{1}{2})^x$ D. $y = \lg x$

4. 如图，给出了奇函数 $f(x)$ 的局部图象，那么 $f(1)$ 等于

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4



5. 已知二次函数 $y = x^2 + mx + (m+3)$ 有两个不同的零点，则 m 的取值范围是

- A. $[-2, 6]$ B. $(-2, 6)$
C. $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$ D. $\{-2, 6\}$

6. $\log_4 2 - \log_4 8$ 等于（ ）

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

7. 函数 $f(x) = x^3 - 5$ 的零点所在的区间是

- A. $(1, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(3, 4)$ D. $(4, 5)$

8. 角的终边经过点 $P(4, y)$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，则 $\tan \theta =$

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{5}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，如果 $a = 3, b = \sqrt{2}, c = 2\sqrt{2}$ ，那么 $\triangle ABC$ 的最大内角的余弦值为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

10. 把函数 $y = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到 $y = g(x)$ 的图象，再把 $y = g(x)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变），得到图象的解析式为

- A. $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$ B. $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})$
C. $y = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$ D. $y = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

11. 已知直线 m, n, l ，平面 α, β, γ ，给出下面四个命题：

$$\textcircled{1} \begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow \beta // \gamma$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \alpha // \beta \\ \alpha // \gamma \end{cases} \Rightarrow \beta // \gamma$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} l \perp m \\ l \perp n \end{cases} \Rightarrow m // n$$

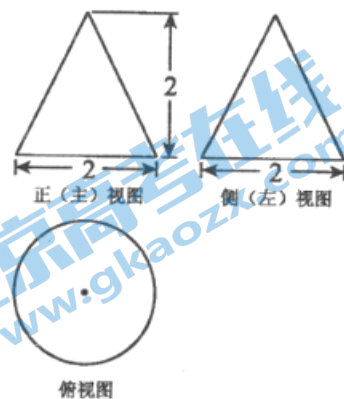
$$\textcircled{4} \begin{cases} m // \alpha \\ m // n \end{cases} \Rightarrow n // \alpha$$

其中正确的命题是

- A. $\textcircled{1}$ B. $\textcircled{2}$ C. $\textcircled{3}$ D. $\textcircled{4}$

12. 某几何体的三视图如下图所示，那么该几何体的体积是

- A. $\frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}\pi$ C. $\frac{8}{3}\pi$ D. 2π



13. 已知直线 l 经过点 $O(0, 0)$ ，且与直线 $x - y - 3 = 0$ 垂直，那么直线 l 的方程是

- A. $x + y - 3 = 0$ B. $x - y + 3 = 0$
C. $x + y = 0$ D. $x - y = 0$

14. 某市共有初中学生 270000 人，其中初一年级，初二年级，初三年级学生人数分别为 99000，90000，81000，为了解该市学生参加“开放性科学实验活动”的意向，现采用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 3000 的样本，那么应该抽取初三年级的人数为

- A. 800 B. 900 C. 1000 D. 1100

15. 口袋中装有大小、材质都相同的 6 个小球，其中有 3 个红球、2 个黄球和 1 个白球，从中随机摸出 1 个球，那么摸到红球或白球的概率是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分

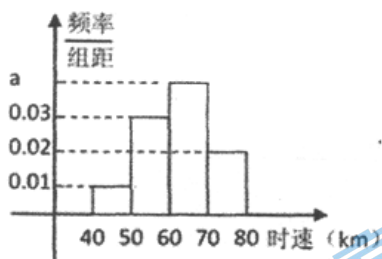
16. 已知圆 M 的方程是 $x^2 - 6x + y^2 - 16 = 0$ ，则该圆的半径是_____。

17. 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ，那么 $\cos(-2\alpha)$ 等于_____。

18. 如果正方形 $ABCD$ 的边长为 1，那么 $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ 等于_____。

19. 函数 $y = -2x^2 + x + 1$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值为_____。

20. 已知 200 辆汽车通过某一段公路时的时速的频率分布直方图如下图所示，则 $a =$ _____。



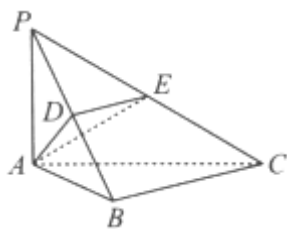
三、解答题：共 2 道大题，每大题 8 分，共 16 分，请写出解题步骤。

21. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$ ， $x \in \mathbb{R}$

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和振幅。

(2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间。

22. 如图，在三棱锥P - ABC中， $PA \perp$ 底面 ABC， $AB \perp BC$ ，D，E，分别为 PB，PC 的中点.



I 求证：BC//平面 ADE；

II 求证：BC $\perp$ 平面 PAB.

2019 北京师大附中高二（上）期末数学参考答案

一、选择题：本大题共 15 小题，每小题 3 分，共 45 分。

1.

【答案】D

【解析】

【分析】

利用两个集合交集的概念及运算，求得两个集合的交集.

【详解】依题意 $M \cap N = \{1\}$ ，故选 D.

【点睛】本小题主要考查集合交集的概念及运算，属于基础题.

2.

【答案】D

【解析】

分析：首先观察函数解析式的特征，根据偶次根式要求被开方式大于等于零，分式要求分母不等于零，列出不等式组，从而求得结果.

详解：根据题意得 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$ ，

故 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$ ，故选 D.

点睛：该题考查的是有关函数的定义域的求解问题，在解题的过程中，需要明确函数定义域的定义，是使得式子有意义的 x 的取值所构成的集合，之后根据式子的特征，列出不等式组，求解即可.

3.

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意，依次分析四个函数在区间 $(0, +\infty)$ 的单调性，即可得答案.

【详解】根据题意，函数 $y = x^2$ ，为二次函数，在区间 $(0, +\infty)$ 为增函数；

$y = x^3$ ，为幂函数，在区间 $(0, +\infty)$ 为增函数；

$y = (\frac{1}{2})^x$ ，为指数函数，在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数；

$y = \lg x$ ，在区间 $(0, +\infty)$ 为增函数；

故选：C.

【点睛】本题考查函数单调性的判定，关键是掌握常见函数的单调性，属于基础题.

4.

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意，由函数的图象可得 $f(-1)$ 的值，结合函数的奇偶性可得 $f(1)$ 的值，即可得答案.

【详解】根据题意，由函数的图象可得 $f(-1) = 2$ ，

又由函数为奇函数，则 $f(1) = -f(-1) = -2$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查函数的奇偶性的性质，关键是掌握函数奇偶性的性质，属于基础题.

5.

【答案】C

【解析】

析：根据二次函数 $y=x^2+mx+(m+3)$ 有两个不同的零点，即得到 $\Delta>0$ ，即关于 m 的不等式

解答：解： $\because$ 二次函数 $y=x^2+mx+(m+3)$ 有两个不同的零点

$$\therefore \Delta > 0$$

$$\text{即 } m^2 - 4(m+3) > 0$$

$$\text{解之得： } m \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$$

故选 C

点评：本题考查了二次函数的性质，不等式的知识，属于基础题.

6.

【答案】B

【解析】

$$\log_4 2 - \log_4 8 = \log_4 \frac{1}{4} = -1, \text{ 选 B.}$$

7.

【答案】A

【解析】

【分析】

求得 $f(1)f(2) < 0$ ，根据函数零点的判定定理可得函数 $f(x)$ 的零点所在的区间.

【详解】由函数 $f(x) = x^3 - 5$ 可得 $f(1) = 1 - 5 = -4 < 0$ ， $f(2) = 8 - 5 = 3 > 0$ ，

故有 $f(1)f(2) < 0$ ，根据函数零点的判定定理可得，函数 $f(x)$ 的零点所在区间为 $(1, 2)$ ，

故选：A.

【点睛】本题主要考查函数的零点的判定定理的应用，属于基本知识的考查.

8.

【答案】C

【解析】

【分析】

由题意利用任意角的正弦函数的定义可求得 $y = -3$ ，再根据正切函数的定义即可求得结果.

【详解】 $\because$ 角的终边经过点 $P(4, y)$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5} = \frac{y}{\sqrt{16 + y^2}}$ ，

$$\therefore y = -3, \text{ 则 } \tan \theta = \frac{y}{4} = -\frac{3}{4}, \text{ 故选 C.}$$

【点睛】本题主要考查任意角的三角函数的定义，属于基础题，若角 α 的终边经过点 (x, y) （异与原点），则

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0).$$

9.

【答案】A

【解析】

【分析】

先判断 $\triangle ABC$ 的最大内角为A, 再利用余弦定理计算 $\cos A$ 的值.

【详解】 $\triangle ABC$ 中, $a=3, b=\sqrt{2}, c=2\sqrt{2}$,

$\therefore a > c > b$,

$\therefore \triangle ABC$ 的最大内角为A, 且 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2 + 8 - 9}{2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$.

故选: A.

【点睛】本题考查了余弦定理的应用问题, 是基础题.

10.

【答案】A

【解析】

【分析】

由题意利用函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换规律, 得出结论.

【详解】把函数 $y = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到 $y = g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图象,

再把 $y = g(x)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的2倍横坐标不变,

所得图象的解析式为 $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$,

故选: A.

【点睛】本题主要考查函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换规律, 属于基础题.

11.

【答案】B

【解析】

【分析】

根据线、面的位置关系有关的判定定理以及性质定理, 对四个命题逐一分析, 由此得出正确命题.

【详解】对于①, 两个平面同时垂直于第三个平面, 这两个平面可能相交, 故①错误. 对于②, 两个平面同时平行于第三个平面, 则这两个平面平行, 故②正确. 对于③两条直线同时垂直于第三条直线, 这两条直线可能异面, 故③错误. 对于④, 直线 n 可能在平面 α 内, 故④错误. 综上所述, 本小题选B.

【点睛】本小题主要考查空间点线面的位置关系, 考查命题真假性的判断, 属于基础题.

12.

【答案】A

【解析】

【分析】

由三视图判断出几何体为圆锥，根据圆锥的体积公式计算出圆锥的体积.

【详解】由三视图可知，几何体为圆锥，故体积为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$ ，故选 A.

【点睛】本小题主要考查三视图的识别，考查圆锥的体积计算公式，属于基础题.

13.

【答案】C

【解析】

【分析】

由题意可求出直线 l 的斜率，由点斜式写出直线方程化简即可.

【详解】 $\because$ 直线 l 与直线 $x - y - 3 = 0$ 垂直，

$\therefore$ 直线 l 的斜率为 -1，

则 $y - 0 = -(x - 0)$ ，即 $x + y = 0$

故选：C.

【点睛】本题考查了直线方程的求法，考查两直线垂直的等价条件，属于基础题.

14.

【答案】B

【解析】

由分层抽样得应该抽取初三年级的人数为 $3000 \times \frac{81000}{270000} = 900$ ，选 B.

15.

【答案】D

【解析】

试题分析：根据题意，口袋中有 6 个球，其中 3 个红球、2 个黄球和 1 个白球，则红球和白球共有 4 个，

故从中随机摸出 1 个球，那么摸到红球或白球的概率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，故选 D.

考点：本题主要考查古典概型的概率计算。

点评：简单题，古典概型概率的计算，关键是明确基本事件总数及导致事件发生的基本事件数，此类问题，可借助于“树图法”不重不漏地写出各个基本事件。注意对题意中“红球或白球”的理解。

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分

16.

【答案】5

【解析】

【分析】

将圆的一般方程配方成标准方程，由此求得圆的半径.

【详解】依题意得 $(x-3)^2 + y^2 = 5^2$ ，故圆的半径是 5.

【点睛】本小题主要考查圆的一般方程转化为标准方程，考查圆的半径，属于基础题.

17.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

根于诱导公式和二倍角公式，计算出所求表达式的值.

【详解】依题意 $\cos(-2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$.

【点睛】本小题主要考查余弦函数的诱导公式，考查余弦函数的二倍角公式，属于基础题.

18.

【答案】1

【解析】

【分析】

根据向量数量积的运算公式，计算出两个向量的数量积.

【详解】依题意 $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

【点睛】本小题主要考查向量的数量积的运算公式，考查正方形的几何性质，属于基础题.

19.

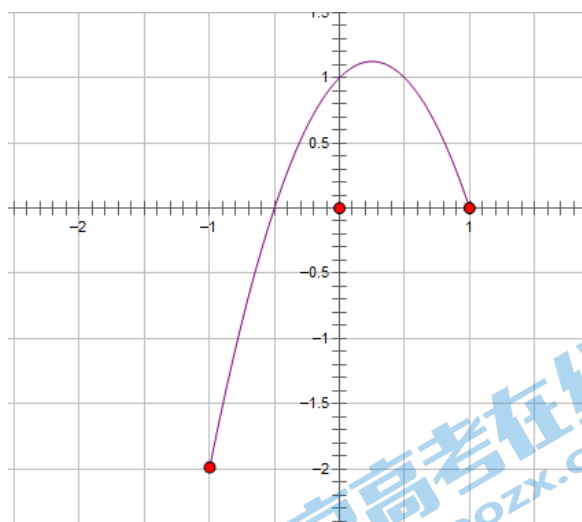
【答案】-2

【解析】

【分析】

画出函数的图像，由此判断函数在何时取得最小值，并且求出这个最小值.

【详解】画出函数的图像如下图所示，由图可知，函数在 $x = -1$ 处取得最小值，最小值为 $-2 \times (-1)^2 + (-1) + 1 = -2$.



【点睛】本小题主要考查二次函数的图像与性质，考查二次函数的最值的求法，考查数形结合的数学思想方法，属于基础题. 要求一个二次函数在给定区间上的最大值或者最小值问题，首先画出二次函数的图像，然后根据题目所给的区间，结合二次函数的对称轴，即可判断出何时取得最值.

20.

【答案】0.04

【解析】

【分析】

根据小长方形面积和为1，列方程，解方程求得值。

【详解】依题意得 $(0.01 + 0.02 + 0.03 + a) \times 10 = 1$ ，解得 $a = 0.04$ 。

【点睛】本小题主要考查频率分布直方图的知识，考查频率分布直方图的小长方形面积和为1，属于基础题。

三、解答题：共2道大题，每大题8分，共16分，请写出解题步骤。

21.

【答案】(1) 见解析；(2) $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

【解析】

【分析】

(1) 先用辅助角公式将 $f(x)$ 化简，然后求得最小正周期和振幅。(2) 利用正弦函数的减区间，求出 $f(x)$ 的减区间。

【详解】(1) $f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

最小正周期 $=\pi$ ，振幅 $=2$ 。

(2) 由 $f(x)$ 递减可得： $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}$

单调递减区间： $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

【点睛】本小题主要考查三角恒等变换，考查三角函数的辅助角公式，考查由 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 求三角函数的最小正周期、振幅和单调减区间等知识，属于中档题。要求 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调减区间，在 $\omega > 0$ 的情况下，将 $\omega x + \varphi$ 代入 $y = \sin x$ 的减区间，然后求得 x 的取值范围，即求得函数的单调减区间。

22.

【答案】I 见解析 II 见解析

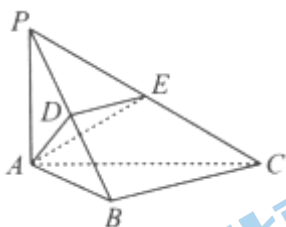
【解析】

【分析】

(I) 由D、E分别为PB、PC的中点，得 $DE \parallel BC$ ，由此能证明 $BC \parallel$ 平面ADE；

(II) 推导出 $PA \perp BC$ ， $AB \perp BC$ ，由此能证明 $BC \perp$ 平面PAB。

【详解】证明：I 在 $\triangle PBC$ 中， $\because$ D、E分别为PB、PC的中点，



$\therefore DE \parallel BC$ ， $\because BC \notin$ 平面ADE， $DE \subset$ 平面ADE，

$\therefore BC \parallel$ 平面ADE。

II) $\because PA \perp$ 平面ABC， $BC \subset$ 平面ABC， $\therefore PA \perp BC$ ，

$\because AB \perp BC$ ， $PA \cap AB = A$ ，

$\therefore BC \perp$ 平面PAB。

【点睛】本题考查线面平行、线面垂直的证明，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想，是中档题.

