名卷·A10联盟2022届高三四月期中考

文科数学参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	A	B	C	A	B	C	B	C	B	D

1. D $\because \frac{5}{-3-\mathrm{i}}=-\frac{5}{3+\mathrm{i}}=-\frac{5(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=-\frac{5(3-\mathrm{i})}{10}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$\therefore a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，则 $a-b=-2$. 故选 D.

2. D 由题意得，$N=\{y|y>-1\}$，$\therefore M\cap N=(-1,1)$. 故选 D.

3. A 由题意得，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(9,2+3\lambda)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-10,4-\lambda)$，$\because(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})//(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\therefore 9(4-\lambda)-(-10)(2+3\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\frac{8}{3}$. 故选 A.

4. B 由两图可知，2021年全国居民人均可支配收入为35128元，比上一年实际增长8.1%，故 A 错误；2021年全国居民人均消费支出，食品烟酒和居住占比 $29.8\%+23.4\%=53.2\%$，超过50%，其他用品及服务占比最小，故 C，D 错误；故选 B.

5. C $\because f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=0$，故函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$，故 A 正确；$\because f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$，故函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$，故 B 正确；令 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，解得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}\ (k\in\mathbf{Z})$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故 C 错误；将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度后得到 $g(x)=-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin 2x$，奇函数，故 D 正确. 故选 C.

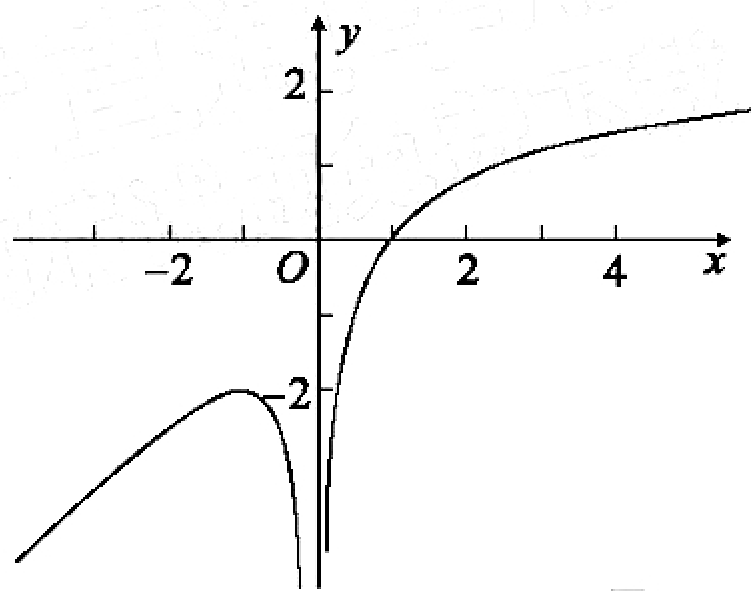
6. A 由三视图知，该几何体为长方体内挖去一个圆锥，$\therefore$ 该几何体的表面积 $S=(36+24+24)\times 2-9\pi+\frac{1}{2}\times 5\times 6\pi=168+6\pi$. 故选 A.

7. B 由题意得，$x+y=-\lg 7+\frac{1}{2}\lg 7=-\frac{1}{2}\lg 7<0$，故命题 q 为假，

$x+y-xy=-\frac{1}{2}\lg 7+\frac{1}{2}(\lg 7)^2=\frac{1}{2}\lg 7(\lg 7-1)<0$，故命题$p$为真，则
$p\wedge(\neg q)$为真命题，$p\wedge q$、$(\neg p)\vee q$、$(\neg p)\wedge(\neg q)$均为假命题，故选 B.

8. C　由题意得，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，$a_6=8$，$a_7=13$，$a_8=21$，$a_9=34$，$a_{10}=55$，$a_{11}=89$，$a_{12}=144$，$a_{13}=233$，…，故$b_1=1$，$b_2=1$，$b_3=2$，$b_4=3$，$b_5=1$，$b_6=0$，$b_7=1$，$b_8=1$，$b_9=2$，$b_{10}=3$，$b_{11}=1$，$b_{12}=0$，$b_{13}=1$，…，故数列$\{b_n\}$的周期为6，则数列$\{b_n\}$的前2022项和为$337\times 8=2696$，故选 C.

9. B　作出函数$f(x)$的图象如图所示，令$g(x)=0$，即$f[f(x)+2]=-2$，则$f(x)+2=-1$或$f(x)+2=\frac{1}{e^2}$，则$f(x)=-3$或$f(x)=\frac{1}{e^2}-2$，而$f(x)=-3$有3个实数根，$f(x)=\frac{1}{e^2}-2$有1个实数根，故$g(x)$的零点个数为4，故选 B.

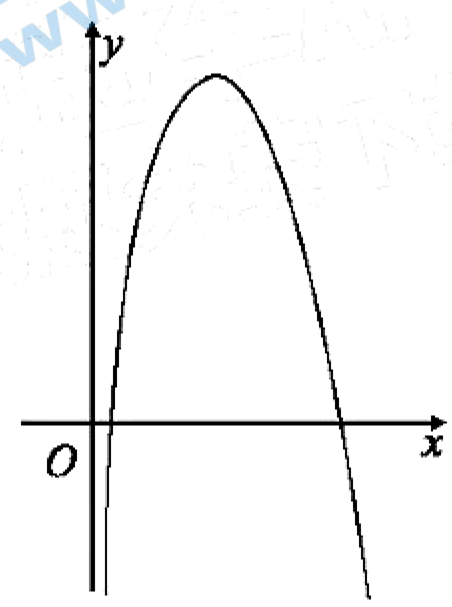


10. C　由题意得，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，$2|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{5}c$，解得$|PF_1|=\frac{2a+2\sqrt{5}c}{3}$，$|PF_2|=\frac{2\sqrt{5}c-4a}{3}$．$\because \angle F_1PF_2=90^\circ$，$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

$\therefore \left(\frac{2a+2\sqrt{5}c}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}c-4a}{3}\right)^2=4c^2$，即$c^2-2\sqrt{5}ac+5a^2=0$，即

$(c-\sqrt{5}a)^2=0$，即$c=\sqrt{5}a$，$\therefore$双曲线C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$．故选 C.

11. B　由题意得，$a=e\left(\frac{\ln x}{x}+2ex-x^2\right)$.令$f(x)=\frac{\ln x}{x}+2ex-x^2$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+2(e-x)$，故当$x\in(0,e)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}+e^2$，又$f(e^{-3})=-3e^3+2e^{-2}-e^{-6}<0$，$f(e^3)=\frac{3}{e^3}+2e^4-e^6<0$，作出函数$f(x)$的大致图象如图所示，$\therefore a<e^3+1$，故选 B.



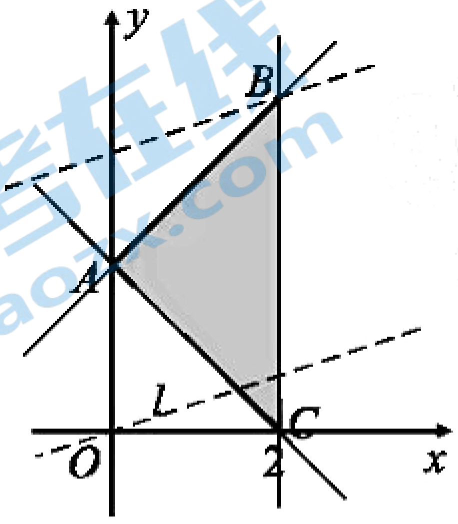
12. D　取AD的中点E，由平面几何知识可得，$D_1E\perp DP$，又$CD\perp D_1E$，$DP\cap CD=D$，所以$D_1E\perp$平面CDP，所以$D_1E\perp CP$．取AB中点F，

连接 EF，则 $EF\perp AC$，又 $AP\perp EF$，$AC\cap AP=A$，所以 $EF\perp$ 平面 ACP，所以 $EF\perp CP$，而 $D_1E\cap EF=E$，$EF//B_1D_1$，所以 $CP\perp$ 平面 EFB_1D_1，所以平面 α 截正方体所得的截面即为梯形 EFB_1D_1．由题意得，$6AB^2=96$，解得 $AB=4$，则 $EF=2\sqrt{2}$，$B_1F=D_1E=2\sqrt{5}$，$B_1D_1=4\sqrt{2}$，故截面周长为 $6\sqrt{2}+4\sqrt{5}$，故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. -10

作出可行域，如图阴影部分，作直线 $l:x-3y=0$，平移直线 l，当直线 l 过点 $B(2,4)$ 时，$x-3y$ 取最小值 -10．



14. $-\dfrac{119}{169}$

$\because \sin\left(\dfrac{2023\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\therefore \cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$，

$\therefore \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\dfrac{119}{169}$．

15. $24\sqrt{3}$

$\because$ 四边形 $AOBC$ 是菱形，$\therefore OA//BC$，$\therefore BC\perp x$ 轴. 设点 $A(0,a)(a>0)$，则 $|BC|=a$，由抛物线的对称性知 $B\left(\dfrac{a^2}{8},-\dfrac{a}{2}\right)$，$C\left(\dfrac{a^2}{8},\dfrac{a}{2}\right)$，由 $OA=OB$ 得 $a=\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{8}\right)^2+\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2}$，解得 $a=4\sqrt{3}$，则菱形 $AOBC$ 的面积为 $4\sqrt{3}\times\dfrac{48}{8}=24\sqrt{3}$．

16. $(-15,-2]$

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，由题意得，$\dfrac{b_5-b_1}{b_1+b_3}=\dfrac{q^4-1}{q^2+1}=q^2-1=3$，解得 $q=2$，代入 $b_1+b_3=5$ 中，解得 $b_1=1$，$\therefore b_n=2^{n-1}$，$\because S_{n+1}+b_n=S_n+a_n+3$，$\therefore a_{n+1}-a_n=3-2^{n-1}$，$\therefore a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=1$，$a_4-a_3=-1$，$\cdots$，$a_{n-1}-a_{n-2}=3-2^{n-3}$，$\therefore a_n-a_{n-1}=3-2^{n-2}$，$\therefore a_1<a_2<a_3>a_4>a_5>\cdots$，又 $a_1=1,a_2=3,a_3=4,a_4=3,a_5=-2,a_6=-15$，$\therefore -15<\lambda\leqslant -2$．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$(0.03+a+0.09+0.06)\times 4=1$，解得 $a=0.07$. ………………… 3 分

平均收看次数：$3\times 0.03\times 4+7\times 0.07\times 4+11\times 0.09\times 4+15\times 0.06\times 4=9.88$（次）.

………………… 6 分

（Ⅱ）记高一年级 3 名女生为 a,b,c，高二年级 3 名女生为 $1,2,3$，高三年级 1 名女生为 A，

现再从中抽取 2 人，所有的基本事件是：

$(a,b),(a,c),(a,1),(a,2),(a,3),(a,A),(b,c),(b,1),(b,2),(b,3),(b,A),(c,1),$

$(c,2),(c,3),(c,A),(1,2),(1,3),(1,A),(2,3),(2,A),(3,A)$，共 21 个基本事件，

………………… 9 分

其中没有高三年级的有 15 个基本事件，则所求概率 $P=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$. ………… 12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}b\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}b\sin A+b\cos A$，

$\therefore \sqrt{3}\sin C=\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin B\cos A$，……………………… 2 分

$\therefore \sqrt{3}\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin B\cos A$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$，……………………… 4 分

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sqrt{3}\cos B=\sin B$，$\therefore \tan B=\sqrt{3}$，

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ……………………… 6 分

（Ⅱ）$\because a+c=4$，则 $0<a<4$，且 $c=4-a$，① ……………………… 7 分

由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，② ……………………… 8 分

联立①②得，$b^2=3a^2-12a+16=3(a-2)^2+4$，$a\in(0,4)$；

故 $b^2\in[4,16)$，即 $b\in[2,4)$. ……………………… 11 分

故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $[6,8)$.……………………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$EA=EP=EC$，$FA=FP=FB$，

$\therefore AP\perp PC$，$AP\perp PB$，………………… 2 分

又 $PB\cap PC=P$，$\therefore AP\perp$ 平面 PBC，$\therefore AP\perp BC$. ……………………… 3 分

$\because AC\perp BC$，$AP\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC. ………………………5 分

（Ⅱ）$\because E,F$ 分别为 AC，AB 的中点，$\therefore BC//EF$，$\therefore EF\perp$ 平面 PAC ……… 6 分

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AC\perp BC$，$\angle BAC=30^\circ$，$AB=4$，

$\therefore BC=2, AC=2\sqrt{3}$，$\therefore EF=1$. ……………………… 7 分

由（Ⅰ）知，$AP\perp PC$，$\therefore PC=\sqrt{AC^2-AP^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle PAE}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 9 分

在 $\triangle PAF$ 中，$FA=FP=2, AP=3$，

$\therefore S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$. ………………………… 10 分

设点 E 到平面 PAF 的距离为 h，

由 $V_{F-PAE}=V_{E-PAF}$ 得，$\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times1=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{7}}{4}\times h$，解得 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……… 12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=4 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$，

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………… 4 分

（Ⅱ）由题意得，$F_2(2,0)$，当 $x=2$ 时，$y=\pm\sqrt{2}$.

当直线 AB 或 DE 有一条的斜率不存在时，可得 $|AB|=2\sqrt{2}$，$|DE|=4\sqrt{2}$ 或

$|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{2}$，此时 $\frac{|DE|}{|AB|}=2$ 或 $\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{1}{2}$. ………………… 5 分

当 AB 和 DE 的斜率都存在且不为 0 时，

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \\ y=k(x-2) \end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-8=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-8}{1+2k^2}$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2}$，……8 分

用 $-\frac{1}{k}$ 替换 k 可得 $|DE|=\frac{4\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2+2}$. ………………………… 9 分

$\therefore \frac{|DE|}{|AB|}=\frac{1+2k^2}{k^2+2}=2-\frac{3}{k^2+2}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$，………………………… 11 分

综上所述，$\dfrac{|DE|}{|AB|}$的取值范围为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$. ………………………… 12分

21.（本小题满分12分）

（Ⅰ）令$f(x)=0$，故$a=x-x\ln x$. ………………………… 1分

令$m(x)=x-x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则$m'(x)=-\ln x$，

故当$x\in(0,1)$时，$m'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$m'(x)<0$，

即函数$m(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减. …………………… 2分

一方面，易知当$x\in(0,1)$时，$m(x)>0$，另一方面，注意到$m(\mathrm{e})=\mathrm{e}-\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=0$，

$\therefore$当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$m(x)>0$，当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$m(x)<0$，

要使函数$m(x)$的图象与直线$y=a$有两个交点，故a的取值范围为$(0,1)$.……5分

（Ⅱ）由题意得，$\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}-1=0$，$\ln x_2+\dfrac{a}{x_2}-1=0$，

两式相减得，$a=\dfrac{x_1x_2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$. ………………………… 7分

要证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}>\dfrac{1}{a}$，即证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{2}{x_2}>\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2(\ln x_1-\ln x_2)}$，

即证：$2x_1+x_2>\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，即证：$2\dfrac{x_1}{x_2}+1>\dfrac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\ln\frac{x_1}{x_2}}$. ………………………… 9分

令$\dfrac{x_1}{x_2}=t>1$，则$\ln\dfrac{x_1}{x_2}>0$，即证：$\ln t>\dfrac{t-1}{2t+1}$. ………………………… 10分

令$g(t)=\ln t-\dfrac{t-1}{2t+1}(t>1)$，则$g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{(2t+1)^2}=\dfrac{4t^2+t+1}{t(2t+1)^2}>0$，

$\therefore g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(t)>g(1)=0$，

则$\ln t>\dfrac{t-1}{2t+1}$，故原命题成立. ………………………… 12分

请考生从第22、23题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分10分）选修4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）由题意得，直线l的普通方程为$x+\sqrt{3}y-6=0$，

其极坐标方程为$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$，即$\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=3$. ……… 3分

$\because\rho=2\cos\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\rho^2=2\rho\cos\alpha$，

$\therefore x^2+y^2=2x$，即$(x-1)^2+y^2=1(y>0)$. ………………………… 5分

（Ⅱ）设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，

由（Ⅰ）知，$|OM|=\rho_1=\frac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$，$|ON|=\rho_2=2\cos\theta$，………… 6分

故 $\frac{|OM|}{|ON|}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\frac{6}{1+\cos2\theta+\sqrt{3}\sin2\theta}$

$=\frac{6}{1+2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$，………………………… 8分

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，$\therefore -\frac{1}{2}<\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

当 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{|OM|}{|ON|}$ 取得最小值2．…………………… 10分

23.（本小题满分10分）选修4–5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$f(x)=\begin{cases}-3x+6, x\leqslant\frac{1}{2}\\ x+4, \frac{1}{2}<x<5\\ 3x-6, x\geqslant 5\end{cases}$，……………………… 3分

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$，则 $m=\frac{9}{2}$．……………………… 5分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$a+b=3$，

由 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 知 $a+1>0,b+2>0$，$a+1+b+2=6$，……………………… 7分

$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}=\frac{1}{6}[(a+1)+(b+2)]\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}\right)$

$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{b+2}{a+1}+\frac{a+1}{b+2}+1\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(2+2\sqrt{\frac{b+2}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b+2}}\right)=\frac{2}{3}$，

当且仅当 $a+1=b+2$ 且 $a+b=3$，即 $a=2,b=1$ 时，等号成立．……… 10分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。