

2009 年全国高中数学联合竞赛一试 试题参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准, 填空题只设 7 分和 0 分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.
 2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中至少 4 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.
- 一、填空 (共 8 小题, 每小题 7 分, 共 56 分)

1. 若函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 且 $f^{(n)}(x) = \underbrace{f[f \cdots f(x)]}_n$, 则 $f^{(99)}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{10}$

【解析】 $f^{(1)}(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,
 $f^{(2)}(x) = f[f(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$
 $\dots\dots$
 $f^{(99)}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+99x^2}}$.
 故 $f^{(99)}(1) = \frac{1}{10}$.

2. 已知直线 $L: x+y-9=0$ 和圆 $M: 2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$, 点 A 在直线 L 上, B, C 为圆 M 上两点, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, AB 过圆心 M , 则点 A 横坐标范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $[3, 6]$

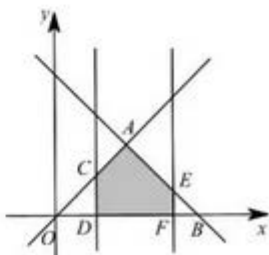
【解析】 设 $A(a, 9-a)$, 则圆心 M 到直线 AC 的距离 $d = |AM| \sin 45^\circ$, 由直线 AC 与圆 M 相交, 得 $d \leq \frac{\sqrt{34}}{2}$.
 解得 $3 \leq a \leq 6$.

3. 在坐标平面上有两个区域 M 和 N , M 为 $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq 2-x \end{cases}$, N 是随 t 变化的区域, 它由不等式 $t \leq x \leq t+1$ 所确定, t 的取值范围是 $0 \leq t \leq 1$, 则 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-t^2 + t + \frac{1}{2}$

【解析】 由题意知

$$\begin{aligned} f(t) &= S_{\text{阴影部分面积}} \\ &= S_{\triangle AOB} - S_{\triangle OCD} - S_{\triangle BEF} \\ &= 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(1-t)^2 \end{aligned}$$



$$= -t^2 + t + \frac{1}{2}$$

4. 使不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < a - 2007\frac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为_____.

【答案】2009

【解析】设 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$. 显然 $f(n)$ 单调递减, 则由 $f(n)$ 的最大值 $f(1) < a - 2007\frac{1}{3}$, 可得 $a = 2009$.

5. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上任意两点 P, Q , 若 $OP \perp OQ$, 则乘积 $|OP| \cdot |OQ|$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

【解析】设 $P(|OP|\cos\theta, |OP|\sin\theta)$,

$$Q\left(|OQ|\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right), |OQ|\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

由 P, Q 在椭圆上, 有

$$\frac{1}{|OP|^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} \quad ①$$

$$\frac{1}{|OQ|^2} = \frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2} \quad ②$$

①+②得

$$\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

于是当 $|OP| = |OQ| = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$ 时, $|OP||OQ|$ 达到最小值 $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6. 若方程 $\lg kx = 2\lg(x+1)$ 仅有一个实根, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 0$ 或 $k = 4$

【解析】
$$\begin{cases} kx > 0 \\ x+1 > 0 \\ kx = (x+1)^2 \end{cases}$$

当且仅当

$$kx > 0 \quad ①$$

$$x+1 > 0 \quad ②$$

$$x^2 + (2-k)x + 1 = 0 \quad ③$$

对③由求根公式得

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2} \left[k-2 \pm \sqrt{k^2-4k} \right] \quad ④$$

$$\Delta = k^2 - 4k \geq 0 \Rightarrow k \leq 0 \text{ 或 } k \geq 4.$$

(i) 当 $k < 0$ 时, 由③得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2 < 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$$

所以 x_1, x_2 同为负根.

又由④知 $\begin{cases} x_1 + 1 > 0 \\ x_2 + 1 < 0 \end{cases}$

所以原方程有一个解 x_1 .

(ii) 当 $k = 4$ 时, 原方程有一个解 $x = \frac{k}{2} - 1 = 1$.

(iii) 当 $k > 4$ 时, 由③得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2 > 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$

所以 x_1, x_2 同为正根, 且 $x_1 \neq x_2$, 不合题意, 舍去.

综上可得 $k < 0$ 或 $k = 4$ 为所求.

7. 一个由若干行数字组成的数表, 从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和, 最后一行仅有一个数, 第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行, 则最后一行的数是_____ (可以用指数表示)

【答案】 101×2^{98}

【解析】 易知:

(i) 该数表共有 100 行;

(ii) 每一行构成一个等差数列, 且公差依次为

$$d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 2^2, \dots, d_{99} = 2^{98}$$

(iii) a_{100} 为所求.

设第 $n (n \geq 2)$ 行的第一个数为 a_n , 则

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + (a_{n-1} + 2^{n-2}) = 2a_{n-1} + 2^{n-2} \\ &= 2[2a_{n-2} + 2^{n-3}] + 2^{n-2} \\ &= 2^2[2a_{n-3} + 2^{n-4}] + 2 \times 2^{n-2} + 2^{n-2} \\ &= 2^3 a_{n-3} + 3 \times 2^{n-2} \\ &\dots\dots \\ &= 2^{n-1} a_1 + (n-1) \times 2^{n-2} \\ &= (n+1) 2^{n-2} \end{aligned}$$

故 $a_{100} = 101 \times 2^{98}$.

8. 某车站每天 8:00~9:00, 9:00~10:00 都恰有一辆客车到站, 但到站的时刻是随机的, 且两者到站的时间是相互独立的, 其规律为

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客 8:20 到车站, 则它候车时间的数学期望为_____ (精确到分).

【答案】 27

【解析】 旅客候车的分布列为

候车时间 (分)	10	30	50	70	90
----------	----	----	----	----	----

概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$
----	---------------	---------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

候车时间的数学期望为

$$10 \times \frac{1}{2} + 30 \times \frac{1}{3} + 50 \times \frac{1}{36} + 70 \times \frac{1}{12} + 90 \times \frac{1}{18} = 27$$

二、解答题

9. (本小题满分 14 分) 设直线 $l: y = kx + m$ (其中 k, m 为整数) 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 交于不同两点 A, B , 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 交于不同两点 C, D , 问是否存在直线 l , 使得向量 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 0$, 若存在, 指出这样的直线有多少条? 若不存在, 请说明理由.

【解析】由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$ 消去 y 化简整理得

$$(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 48 = 0$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}$$

$$\Delta_1 = (8km)^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 48) > 0$$

①4 分

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$ 消去 y 化简整理得

$$(3 - k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 12 = 0$$

$$\text{设 } C(x_3, y_3), D(x_4, y_4), \text{ 则 } x_3 + x_4 = \frac{2km}{3 - k^2}$$

$$\Delta_2 = (-2km)^2 - 4(3 - k^2)(m^2 + 12) > 0$$

②8 分

因为 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 0$, 所以 $(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1) = 0$, 此时 $(y_4 - y_2) + (y_3 - y_1) = 0$. 由 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ 得

$$-\frac{8km}{3 + 4k^2} = \frac{2km}{3 - k^2}.$$

所以 $2km = 0$ 或 $-\frac{4}{3 + 4k^2} = \frac{1}{3 - k^2}$. 由上式解得 $k = 0$ 或 $m = 0$. 当 $k = 0$ 时, 由①和

②得 $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$. 因 m 是整数, 所以 m 的值为 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. 当 $m = 0$, 由①和②得 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$. 因 k 是整数, 所以 $k = -1, 0, 1$. 于是满足条件的直线共有 9 条.14 分

10. (本小题 15 分) 已知 $p, q (q \neq 0)$ 是实数, 方程 $x^2 - px + q = 0$ 有两个实根 α, β , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = p, a_2 = p^2 - q, a_n = pa_{n-1} - qa_{n-2} (n = 3, 4, \dots)$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (用 α, β 表示);

(II) 若 $p = 1, q = \frac{1}{4}$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

【解析】方法一.

官方微信公众号: bj-gaokao
官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980
微信客服: gaokzx2018

(1) 由韦达定理知 $\alpha \cdot \beta = q \neq 0$, 又 $\alpha + \beta = p$, 所以

$$a_n - px_{n-1} - qx_{n-2} = (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2}, \quad (n=3, 4, 5, \dots)$$

$$\text{整理得 } a_n - \beta a_{n-1} = \alpha(a_{n-1} - \beta a_{n-2})$$

令 $b_n = a_{n+1} - \beta a_n$, 则 $b_{n+1} = \alpha b_n (n=1, 2, \dots)$. 所以 $\{b_n\}$ 是公比为 α 的等比数列.
数列 $\{b_n\}$ 的首项为:

$$b_1 = a_2 - \beta a_1 = p^2 - q - \beta p = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - \beta(\alpha + \beta) = \alpha^2.$$

所以 $b_n = \alpha^2 \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^{n+1}$, 即 $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n+1} (n=1, 2, \dots)$. 所以

$$a_{n+1} = \beta a_n + \alpha^{n+1} (n=1, 2, \dots).$$

① 当 $\Delta = p^2 - 4q = 0$ 时, $\alpha = \beta \neq 0$, $a_1 = p = \alpha + \alpha = 2\alpha$,

$$a_{n+1} = \beta a_n + \alpha^{n+1} (n=1, 2, \dots) \text{ 变为 } a_{n+1} = \alpha a_n + \alpha^{n+1} (n=1, 2, \dots). \text{ 整理得,}$$

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = 1, \quad (n=1, 2, \dots). \text{ 所以, 数列 } \left\{ \frac{a_n}{\alpha^n} \right\} \text{ 成公差为 1 的等差数列, 其}$$

$$\text{首项为 } \frac{a_1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2. \text{ 所以}$$

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = 2 + 1(n-1) = n+1.$$

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = (n+1)\alpha^n; \dots\dots\dots$$

.....5 分

② 当 $\Delta = p^2 - 4q > 0$ 时, $\alpha \neq \beta$,

$$a_{n+1} = \beta a_n + \alpha^{n+1}$$

$$= \beta a_n + \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} \alpha^{n+1}$$

$$= \beta a_n + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \alpha^{n+1} - \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \alpha^{n+1} (n=1, 2, \dots).$$

整理得

$$a_{n+1} + \frac{\alpha^{n+2}}{\beta - \alpha} = \beta \left(a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \right), \quad (n=1, 2, \dots).$$

所以, 数列 $\left\{ a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \right\}$ 成公比为 β 的等比数列, 其首项为

$$a_1 + \frac{\alpha^2}{\beta - \alpha} = \alpha + \beta + \frac{\alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^2}{\beta - \alpha}. \text{ 所以 } a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^2}{\beta - \alpha} \beta^{n-1}.$$

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(II) 若 $p=1, q=\frac{1}{4}$, 则 $\Delta = p^2 - 4q = 0$, 此时 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. 由第(1)步的结果得,

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$, 所以, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$s_n = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

以上两式相减, 整理得 $\frac{1}{2}s_n = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}$

所以

$$s_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}, \dots\dots\dots$$

.....15 分

方法二:

(I) 由韦达定理知 $\alpha \cdot \beta = q \neq 0$, 又 $\alpha + \beta = p$, 所以

$$a_1 = \alpha + \beta, \quad a_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta.$$

特征方程 $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ 的两个根为 α, β .

① 当 $\alpha = \beta \neq 0$ 时, 通项 $a_n = (A_1 + A_2n)\alpha^n (n=1, 2, \dots)$ 由 $a_1 = 2\alpha, a_2 = 3\alpha^2$ 得

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)\alpha = 2\alpha \\ (A_1 + 2A_2)\alpha^2 = 3\alpha^2 \end{cases}$$

解得 $A_1 = A_2 = 1$. 故

$$a_n = (1+n)\alpha^n. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

② 当 $\alpha \neq \beta$ 时, 通项 $a_n = A_1\alpha^n + A_2\beta^n (n=1, 2, \dots)$. 由 $a_1 = \alpha + \beta,$

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta \text{ 得}$$

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = \alpha + \beta \\ A_1\alpha^2 + A_2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta \end{cases}$$

$$\text{解得 } A_1 = \frac{-\alpha}{\beta - \alpha}, \quad A_2 = \frac{\beta}{\beta - \alpha}. \text{ 故}$$

$$a_n = \frac{-\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}. \dots\dots\dots 10$$

分

(II) 同方法一.

11. (本小题满分 15 分) 求函数 $y = \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} + \sqrt{x}$ 的最大和最小值.

【解析】函数的定义域为 $[0, 13]$. 因为

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} = \sqrt{x+27} + \sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}} \\ &\geq \sqrt{27} + \sqrt{13} \\ &= 3\sqrt{3} + \sqrt{13} \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时等号成立. 故 y 的最小值为

$$3\sqrt{3} + \sqrt{13}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

又由柯西不等式得

$$\begin{aligned} y^2 &= (\sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x})^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}\right)(2x + (x+27) + 3(13-x)) = 121 \end{aligned}$$

所以

$$y \leq 11. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由柯西不等式等号成立的条件, 得 $4x = 9(13-x) = x+27$, 解得 $x=9$. 故当 $x=9$ 时等号成立. 因此 y 的最大值为

$$11. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$