

2018 北京市朝阳区高二（下）期末

数 学（理）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 450 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数 $z = \frac{2}{1+i}$ 对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数， $f(x) = \sin 2x$ ，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ （ ）

- A. -2 B. 2 C. 0 D. -1

3. 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，若直线 l 的极坐标方程为

$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3$ ，则直线 l 的直角坐标系方程为（ ）

- A. $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$ B. $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ C. $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$ D. $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$

4. 直线 $y = x$ 与曲线 $y = x^2$ 围成的封闭图形的面积为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

5. “ $a = 3$ ” 是 “复数 $z = (a^2 - 9) + (a + 1)i$ ($a \in R$) 为纯虚数” 的（ ）

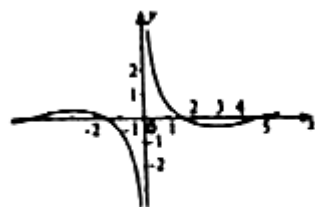
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充也而不必要条件

6. 甲、乙两名同学参加学校“吉祥物设计”大赛. 甲能获得一等奖的概率是 $\frac{1}{3}$ ，乙能获得一等奖的概率是 $\frac{3}{4}$ ，甲

乙两人是否获得一等奖互不影响，则甲乙两人中至少有一人获得一等奖的概率为（ ）

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，则该函数可能是（ ）



(第 7 题图)

A. $y = \frac{\sin x}{x}$ B. $y = \frac{\cos x}{x}$ C. $y = \frac{\cos x}{|x|}$ D. $y = \frac{|\sin x|}{x}$

8. 若从 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字中选 3 个数字, 组成没有重复数字的三位偶数, 则这样的三位数一共有 ()

A. 20 个 B. 48 个 C. 52 个 D. 120 个

9. 用数学归纳法证明 “ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$ ($n \in N^*$, $n > 1$)” 时, 由假设 $n = k$ ($k > 1$, $k \in N^*$) 不等式成立, 推证 $n = k + 1$ 不等式成立时, 不等式左边应增加的项数是 ()

A. 2^{k-1} B. $2^k - 1$ C. 2^k D. $2^k + 1$

10. 某市在今年高中学生足球联赛分组中, 通过抽签方式, 把甲、乙、丙、丁四支队伍分到编号为 1, 2, 3, 4 的四个小组中作为种子队 (每组有且只有一个种子队). A, B, C, D 四位学生进行如下预测:

A 预测: 乙队在第 1 小组, 丙队在第 3 小组;

B 预测: 乙队在第 2 小组, 丁队在第 3 小组;

C 预测: 丁队在第 4 小组, 丙队在第 2 小组;

D 预测: 甲队在第 4 小组, 丙队在第 3 小组;

如果 A, B, C, D 四位学生每人的预测都只对了一半, 那么在第 3 小组和第 4 小组的种子队分别是 ()

A. “丁在第 3 小组, 丙在第 4 小组” 或 “甲在第 3 小组, 丁在第 4 小组”

B. “丙在第 3 小组, 丁在第 4 小组” 或 “甲在第 3 小组, 丁在第 4 小组”

C. “丁在第 3 小组, 丙在第 4 小组” 或 “丁在第 3 小组, 甲在第 4 小组”

D. “丙在第 3 小组, 丁在第 4 小组” 或 “丁在第 3 小组, 甲在第 4 小组”

二、填空题 (每题 5 分, 满分 30 分, 将答案填在答题纸上)

11. 二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项为_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, $r > 0$), 直线 l 的方程为

$x - y - 3 = 0$, 若直线 l 与圆 C 相切, 则 $r =$ _____.

13. 袋中有大小相同、质量相等的 3 个白球和 2 个黑球, 若每次抽取 1 个球, 有放回地连续抽取 3 次, 则恰有 1 次取到黑球的概率为_____; 取到黑球的个数 X 的数学期望是_____.

14. 今年某校在安排高一年级期末考试时, 规定: 语文、数学、英语、政治为必考科目, 物理、化学、生物、历史、地理为选考科目, 每名学生需从选考科目中选择 3 个科目参加考试. 小明同学决定在生物、历史、地理 3 个学科中至多选择 2 个学科, 那么小明同学期末考试的选考方案有_____种 (用数字作答).

15. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 恰有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x < a \\ -2x, & x \geq a \end{cases}$, 若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____; 若关于 x 的不等式 $f(x) > 4a$

在实数集 R 上有解, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 已知函数 $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

18. 某区为检测各校学生的体质健康状况, 依照中小学生 (国家学生体质健康标准) 进行测试, 参加测试的学生统一从学生学籍档案管理库 (简称 “CIMS 系统”) 随机选取. 本次测试要求每校派出 30 人, 其中男女学生各 15 人, 参加八个项目的测试. 八个测试的平均分为该学生的综合成绩, 满分为 100 分. 测试按照分数给学生综合成绩定登记, 分数在 $[90, 100]$ 内为 “优秀”, $[80, 90)$ 为 “良好”, $[60, 80)$ 为 “及格”, $[0, 60)$ 为 “不及格”, 下表为某学校 30 名学生本次测试综合成绩的数据:

男生	98	92	92	91	90	90	88	87	87	85	82	79	77	67	57
女生	97	99	96	93	92	91	90	87	85	81	80	77	76	76	48

(1) 分别求出该学校男、女生综合成绩的优秀率;

(2) 从表中综合成绩等级为 “良好” 的学生中随机抽取 3 人进行后续监控, 若 X 表示抽取 3 人中的女生人数, 求 X 的分布列及其数学期望;

(3) 在 (2) 的条件下, 当这 3 名学生综合成绩的方差取得最大值时, 请直接写出所有符合条件的 3 名学生的综合成绩.

19. 设函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 + (a-1)x$ ($a \in R$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(1) 令 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在其定义域内为减函数, 求 a 的取值集合;

(3) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围.