

2022 北京朝阳高一（下）期末

数 学

2022.7

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

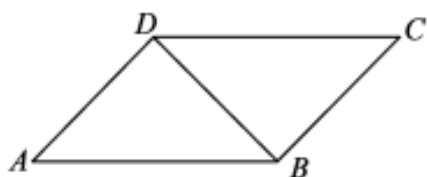
本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内，复数 $z = (1+i)(2-i)$ （其中 i 为虚数单位）对应的点位于（ ）
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (x, -2)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 x 的值为（ ）
A. 4 B. -4 C. 2 D. -2
3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，下列结论正确 是（ ）



- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD}$
 - C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
4. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ ，则 $\triangle ABC$ 是（ ）
A. 钝角三角形 B. 等边三角形
C. 等腰直角三角形 D. 直角三角形，但不是等腰三角形
 5. 已知 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面， $m \subset \alpha, n \subset \beta$ ，下列结论中正确的是（ ）
A. 若 $m \parallel n$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $\alpha \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$
C. 若 m 与 n 不相交，则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $\alpha \parallel \beta$ ，则 m 与 n 不相交
 6. 某西瓜种植基地种植了三个品种的西瓜共计 1200 亩，其中 A 品种 600 亩， B 品种 400 亩， C 品种 200 亩。为了解该西瓜种植基地的西瓜产量，按照各品种的种植亩数在总体中所占的比例进行分层随机抽样，从总体中抽出 60 亩作为样本进行调查，测得样本中 A 品种总产量为 108 吨， B 品种总产量为 50 吨， C 品

种总产量为 20 吨，则这 1200 亩西瓜的总产量估计为 ()

- A. 1200 吨 B. 3000 吨 C. 3560 吨 D. 6480 吨

7. 两位射击运动员在射击测试中各射靶 10 次，每次命中的环数如下：

甲	7	9	7	8	5	4	9	10	7	4
乙	8	5	7	8	7	6	10	6	7	7

用 x_1, x_2 分别表示甲、乙两名运动员 10 次射击成绩的第 80 百分位数，用 s_1, s_2 分别表示甲、乙两名运动员 10 次射击成绩的标准差，则有 ()

- A. $x_1 = x_2, s_1 < s_2$ B. $x_1 > x_2, s_1 < s_2$ C. $x_1 = x_2, s_1 > s_2$ D. $x_1 > x_2, s_1 > s_2$

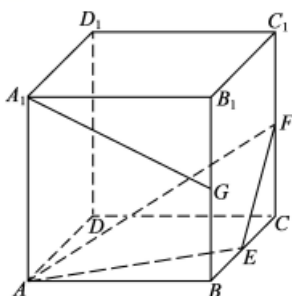
8. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1$ ，则角 A 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right)$

9. 把 $y = |x|$ 和 $y = 2$ 的图象围成的封闭平面图形绕 x 轴旋转一周，所得几何体的体积为 ()

- A. $\frac{32}{3}\pi$ B. 16π C. $\frac{16}{3}\pi$ D. $4\sqrt{2}\pi$

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点，则下列结论中正确的是 ()



- ①直线 D_1D 与直线 AF 垂直； ②直线 A_1G 与平面 AEF 平行；
③点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等； ④平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$.
A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

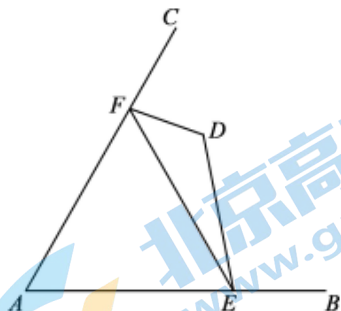
11. 若复数 $z = (1+i) \cdot i$ (其中 i 为虚数单位)，则共轭复数 $\bar{z} =$ _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $c = \sqrt{2}, b = \sqrt{6}, B = \frac{\pi}{3}$ ， $C =$ _____.

13. 已知向量 $\vec{a} = (4, -3)$, $\vec{b} = (2, t-2)$, 且 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2$, 则 $t =$ _____, $|\vec{b}| =$ _____.

14. 一个袋子中有大小和质地相同 4 个红球和 n 个绿球, 采用有放回方式从中依次随机地取出 2 个球, 若取出的 2 个球颜色不同的概率为 $\frac{4}{9}$, 则 n 的所有可能取值为 _____.

15. 如图, 某湿地为拓展旅游业务, 现准备在湿地内建造一个观景台 D . 已知湿地夹在公路 AB, AC 之间 (AB, AC 长度均超过 4km), 且 $\angle BAC = 60^\circ$. 在公路 AB, AC 上分别设有游客接送点 E, F , $AE = AF = 2\sqrt{3}$ km. 若要求观景台 D 建在 E, F 两点连线的右侧, 并在观景台 D 与接送点 E, F 之间建造两条观光线路 DE 与 DF , $\angle EDF = 120^\circ$, 则观光线路 DE 与 DF 之和最长为 _____ km.



16. 已知 $\vec{e}$ 是单位向量, 向量 $\vec{b}_i (i=1, 2)$ 满足 $|\vec{e} - \vec{b}_i| = \vec{e} \cdot \vec{b}_i$, 且 $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{e}$, 其中 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x + y = 1$. 则下列结论中, 正确结论的序号是 _____.

① $x\vec{e} \cdot \vec{b}_1 + y\vec{e} \cdot \vec{b}_2 = 1$;

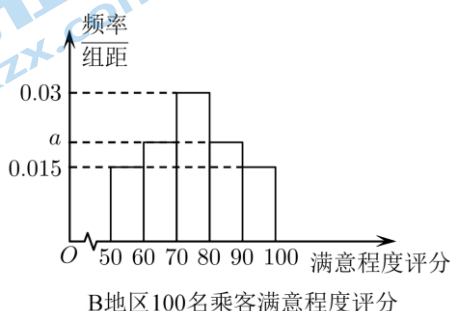
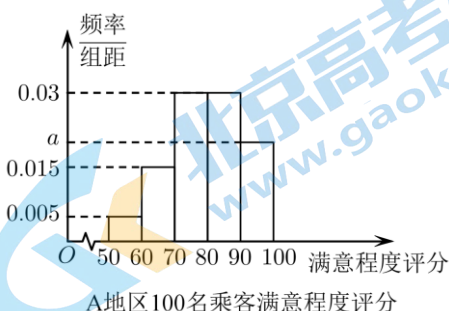
② $(y|x| + x|y|)|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = \frac{1}{2}$;

③ 存在 x, y , 使得 $|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = 2$;

④ 当 $|\vec{b}_1 - \vec{b}_2|$ 取最小值时, $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 为方便 A, B 两地区的乘客早晚高峰通勤出行, 某公交集团新开通一条快速直达专线. 该线路运营一段时间后, 为了解乘客对该线路的满意程度, 从 A, B 两地区分别随机抽样调查了 100 名乘客, 将乘客对该线路的满意程度评分分成 5 组: $[50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$, 整理得到如下频率分布直方图:



根据乘客满意程度评分，将乘客的满意程度分为三个等级：

满意程度评分	[50,70)	[70,90)	[90,100]
满意程度等级	不满意	满意	非常满意

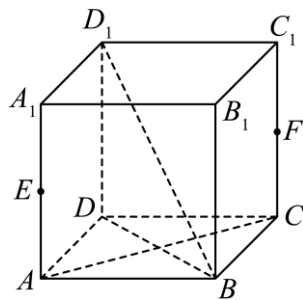
- (1) 从 A 地区随机抽取一名乘客，以频率估计概率，估计该乘客的满意程度等级是非常满意的概率；
- (2) 从 A 地区与 B 地区各随机抽取一名乘客，记事件 C 为“抽取的两名乘客中，一名乘客的满意程度等级为非常满意且另一名乘客的满意程度等级为不满意”，假设两地区乘客的评分相互独立，以频率估计概率，求事件 C 的概率；
- (3) 设 μ_1 为从 A 地区随机抽出的这 100 名乘客的满意程度评分的平均数， μ_2 为从 B 地区随机抽出的这 100 名乘客的满意程度评分的平均数， μ 为从 A, B 两地区随机抽出的这 200 名乘客的满意程度评分的平均数，试比较 $|\mu_1 - \mu|$ 与 $|\mu_2 - \mu|$ 的大小，并说明理由。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $b^2 - c^2 = a^2 - \sqrt{2}ac$ 。

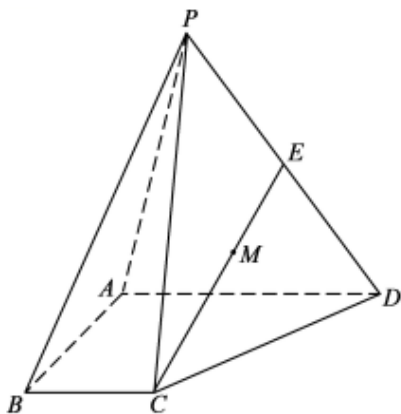
- (1) 求角 B ；
- (2) 从① $C = 2B$ ，② $b \cos A = a \cos B$ 中选取一个作为条件，证明另外一个成立；
- (3) 若 D 为线段 AB 上一点，且 $\angle BCD = \frac{1}{2} \angle B, CD = 4$ ，求 $\triangle BCD$ 的面积。

19. 如图，在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为菱形，

$AB = 2, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， E, F 分别为 AA_1, CC_1 的中点。



- (1) 证明 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ，并求点 C 到平面 BDD_1 的距离；
- (2) 证明： B, F, D_1, E 四点共面。
20. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, BC \parallel$ 平面 $PAD, BC = \frac{1}{2} AD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， E 是 PD 的中点。



(1) 求证: $BC \parallel AD$;

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(3) 若 M 是线段 CE 上任意一点, 试判断线段 AD 上是否存在点 N , 使得 $MN \parallel$ 平面 PAB ? 请说明理由.

21. 若集合 $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, 其中 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为非空集合, $B_i \cap B_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq n)$, 则称集合 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 为集合 A 的一个 n 划分.

(1) 写出集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的所有不同的 2 划分;

(2) 设 $\{B_1, B_2\}$ 为有理数集 Q 的一个 2 划分, 且满足对任意 $x \in B_1$, 任意 $y \in B_2$, 都有 $x < y$. 则下列四种情况哪些可能成立, 哪些不可能成立? 可能成立的情况请举出一个例子, 不能成立的情况请说明理由;

- ① B_1 中的元素存在最大值, B_2 中的元素不存在最小值;
- ② B_1 中的元素不存在最大值, B_2 中的元素存在最小值;
- ③ B_1 中的元素不存在最大值, B_2 中的元素不存在最小值;
- ④ B_1 中的元素存在最大值, B_2 中的元素存在最小值.

(3) 设集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$, 对于集合 A 的任意一个 3 划分 $\{B_1, B_2, B_3\}$, 证明: 存在 $i \in \{1, 2, 3\}$, 存在 $a, b \in B_i$, 使得 $b - a \in B_i$.

参考答案

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算求出复数 z ，再根据复数的几何意义即可得解。

【详解】解： $z = (1+i)(2-i) = 3+i$ ，

则对应点的坐标为 $(3,1)$ ，位于第一象限。

故选：A.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】根据向量共线的坐标表示即可得出答案。

【详解】解：因为 $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (x,-2)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

所以 $2 \times (-2) - x = 0$ ，解得 $x = -4$ 。

故选：B.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】利用相等向量可判断 A 选项；利用平面向量的加法可判断 BD 选项；利用平面向量的减法可判断 C 选项。

【详解】对于 A 选项， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，A 错；

对于 B 选项， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ ，B 错；

对于 C 选项， $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ ，C 对；

对于 D 选项， $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ ，D 错。

故选：C.

4. 【答案】B

【解析】

【分析】先由正弦定理得 $\tan A = \tan B = \tan C$ ，进而得到 $A = B = C$ ，即可求解。

【详解】由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C}$ ，则 $\tan A = \tan B = \tan C$ ，又 A, B, C 为三角形内角，

则 $A = B = C$ ，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

故选：B.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根据面面平行的判定定理和性质定理对选项一一判断即可得出答案.

【详解】若 $m \parallel n$ ，则 α, β 可能平行、可能相交，故 A 不正确；

若 $\alpha \parallel \beta$ ，则 m, n 可能平行、可能异面，故 B 不正确；

若 m 与 n 不相交，则 α, β 也不一定平行，故 C 不正确；

若 m 与 n 不相交，则 $\alpha \parallel \beta$ ，故 D 正确

故选：D.

6. 【答案】C

【解析】

【分析】根据抽样方法是按照各品种的种植亩数在总体中所占的比例进行分层随机抽样即可求解.

【详解】解：根据题意这 1200 亩西瓜的总产量估计为 $\frac{1200}{60} \times (108 + 50 + 20) = 3560$ 吨，

故选：C.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】根据百分位数和方差的定义计算求解即可.

【详解】将甲、乙两组数据分别从小到大排列：

甲：4, 4, 5, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10

乙：5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10

因为 $10 \times 80\% = 8$ ，所以 $x_1 = \frac{9+9}{2} = 9$ ， $x_2 = \frac{8+8}{2} = 8$.

甲的平均数 $\bar{x}_1 = \frac{4+4+5+7+7+7+8+9+9+10}{10} = 7$ ，

乙的平均数 $\bar{x}_2 = \frac{5+6+6+7+7+7+7+8+8+10}{10} = 7.1$ ，

所以 $s_1 = \sqrt{\frac{(4-7)^2 + (4-7)^2 + (5-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (9-7)^2 + (10-7)^2}{10}} = 2$ ，

同理可得 $s_2 = 1.3$.

所以 $x_1 > x_2$ ， $s_1 > s_2$.

故选：D.

8. 【答案】A

【解析】

【分析】先由 $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1$ 化简得 $b^2 + c^2 - a^2 \geq bc$ ，再由余弦定理得 $\cos A \geq \frac{1}{2}$ ，即可求得角 A 的取值范围.

【详解】由 $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1$ 可得 $b(a+b) + c(a+c) \geq (a+b)(a+c)$, 整理得 $b^2 + c^2 - a^2 \geq bc$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq \frac{1}{2}$, 则 $A \leq \frac{\pi}{3}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 则 $A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$.

故选: A.

9. 【答案】A

【解析】

【分析】根据圆柱和圆锥的体积公式即可求解.

【详解】解: 由题意, 该几何体可以看作一个圆柱挖去两个完全相同的圆锥,

所以所得几何体的体积为 $V = \pi \times 2^2 \times 4 - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2 = \frac{32}{3}\pi$,

故选: A.

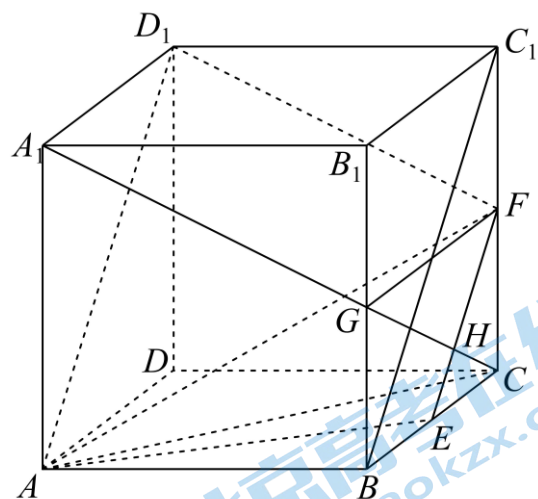
10. 【答案】C

【解析】

【分析】由 $\angle AFC$ 即为直线 AF 与直线 D_1D 所成的角, 即可判断①; 对于②, 连接 AD_1, D_1F, GF , 由线面平行的判定即可判断②; 由平面 AEF 不过 CG 的中点即可判断③; 先找出截面, 再计算面积即可判断④.

【详解】解: 对于①, 由正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 得 $D_1D \parallel CC_1$, 则 $\angle AFC$ 即为直线 AF 与直线 D_1D 所成的角,

连接 AC , 而 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $CC_1 \perp AC$, 所以在 $\triangle AFC$ 中, 则 $\angle AFC$ 不可能是直角, 直线 AF 与直线 D_1D 不垂直, 故①不正确;



对于②, 连接 AD_1, D_1F, GF , 则 $A_1G \parallel D_1F, AD_1 \parallel BC_1 \parallel EF$, 所以 $AD_1 \subset$ 平面 AEF , $A_1G \not\subset$ 平面 AEF , $D_1F \subset$ 平面 AEF , 所以 $A_1G \parallel$ 平面 AEF , 故②正确;

对于③, 若点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等, 则平面 AEF 必过 CG 的中点, 连接 CG 交 EF 于 H , 且

H 不是 CG 的中点,

则平面 AEF 不过 CG 的中点, 即点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离不相等, ③不正确;

对于④, 因为 $AD_1 \parallel EF$, $AE = D_1F$, 所以等腰梯形 $AEFD_1$ 即为平面 AEF 截正方体所得的截面,

则 $AD_1 = 2\sqrt{2}$, $EF = \sqrt{2}$, $AE = D_1F = \sqrt{5}$, AD_1, EF 之间的距离为 $\sqrt{AE^2 - \left(\frac{AD_1 - EF}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

则 $AEFD_1$ 面积为 $\frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$, 故④正确.

故选: C.

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 【答案】 $-1-i$

【解析】

【分析】由复数乘法法则计算出 z 后可得其共轭复数.

【详解】由已知得, $z = (1+i) \cdot i = -1+i$, 则 $\bar{z} = -1-i$

故答案为: $-1-i$.

12. 【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】直接利用正弦定理即可得出答案, 注意大边对大角.

【详解】解: 因为 $c = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$,

又正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$,

由 $c = \sqrt{2} < b = \sqrt{6}$, 得 $C < B$,

所以 $C = \frac{\pi}{6}$.

故答案为: $\frac{\pi}{6}$.

13. 【答案】 ①. -3 ②. $\sqrt{29}$

【解析】

【分析】根据向量坐标的线性运算求出 $\vec{a} - \vec{b}$, 再根据数量积的坐标运算即可求出 t , 再根据向量的模的坐标公式即可求出 $|\vec{b}|$.

【详解】解：因为 $\vec{a} = (4, -3)$, $\vec{b} = (2, t-2)$,

所以 $\vec{a} - \vec{b} = (2, -1-t)$,

则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 8 - 3(-1-t) = 2$, 解得 $t = -3$,

所以 $\vec{b} = (2, -5)$,

所以 $|\vec{b}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

故答案为: $-3; \sqrt{29}$.

14. 【答案】2 或 8

【解析】

【分析】先求出取出 2 个球颜色不同的概率, 再解方程求解即可.

【详解】由题意知, 取出的 2 个球颜色不同的概率为 $\frac{4 \cdot n}{(n+4)(n+4)} + \frac{n \cdot 4}{(n+4)(n+4)} = \frac{4}{9}$,

化简得 $n^2 - 10n + 16 = 0$, 解得 $n = 2$ 或 8 .

故答案为: 2 或 8.

15. 【答案】4

【解析】

【分析】利用余弦定理得到关于 DE 与 DF 的方程, 借助基本不等式求 $DE + DF$ 的最大值.

【详解】在 $\triangle AEF$ 中, $EF = 2\sqrt{3}$;

在 $\triangle DEF$ 中, 设 $DE = m, DF = n$, 由余弦定理可得: $EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos \angle EDF$,

即: $12 = m^2 + n^2 + mn$, 即 $12 = (m+n)^2 - mn$,

因为 $mn \leq \frac{(m+n)^2}{4}$, 所以 $(m+n)^2 - 12 \leq \frac{(m+n)^2}{4}$, $m+n \leq 4$,

当且仅当 $m = n = 2$ 时, $m+n$ 取到最大值 4, 即 DE 与 DF 之和最长为 4.

故答案为: 4.

16. 【答案】①③④

【解析】

【分析】由 $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{e}$ 结合数量积运算得 $x\vec{e} \cdot \vec{b}_1 + y\vec{e} \cdot \vec{b}_2 = 1$; 又由 $x+y=1$, 求得 $|x||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = \vec{e} \cdot \vec{b}_2$,

$|y||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = \vec{e} \cdot \vec{b}_1$ 进而得 $(y|x| + x|y|)|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = 1$; 结合基本不等式求得 $|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| \geq 2$; 进而得到

$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 2\vec{e}$, 同时平方即得 $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$.

【详解】由 $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{e}$ 可得 $(x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2) \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$, 即 $x\vec{e} \cdot \vec{b}_1 + y\vec{e} \cdot \vec{b}_2 = 1$, ①正确;

又 $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{e}$ 且 $x+y=1$, 则 $x\vec{b}_1 + (1-x)\vec{b}_2 = \vec{e}$, 即 $x(\vec{b}_1 - \vec{b}_2) = \vec{e} - \vec{b}_2$, 所以 $|x||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = |\vec{e} - \vec{b}_2|$,

又 $|\vec{e} - \vec{b}_2| = \vec{e} \cdot \vec{b}_2$ ，则 $|x||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = |\vec{e} - \vec{b}_2| = \vec{e} \cdot \vec{b}_2$ ，同理 $|y||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = |\vec{e} - \vec{b}_1| = \vec{e} \cdot \vec{b}_1$ ，

则 $y|x||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| + x|y||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = y\vec{e} \cdot \vec{b}_2 + x\vec{e} \cdot \vec{b}_1 = 1$ ，即 $(y|x| + x|y|)|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = 1$ ，②错误；

由 $x + y = 1$ 知 x, y 至少一正，若 x, y 一正一负，则 $y|x| + x|y| = 0$ ，显然不满足 $(y|x| + x|y|)|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = 1$ ，

故 x, y 均为正，则 $y|x| + x|y| = 2xy \leq 2 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时等号成立，则

$$|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = \frac{1}{y|x| + x|y|} \geq 2,$$

当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时等号成立，则存在 x, y ，使得 $|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = 2$ ，③正确；

当 $|\vec{b}_1 - \vec{b}_2|$ 取最小值 2 时， $x = y = \frac{1}{2}$ ，由 $x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 = \vec{e}$ 可得 $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 2\vec{e}$ ，则 $(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)^2 = 4$ ，

即 $(\vec{b}_1 - \vec{b}_2)^2 + 4\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 4$ ，则 $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$ ，④正确。

故答案为：①③④。

【点睛】本题关键在于由 $x\vec{e} \cdot \vec{b}_1 + y\vec{e} \cdot \vec{b}_2 = 1$ 结合 $x + y = 1$ 得到 $|x||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = \vec{e} \cdot \vec{b}_2$ ， $|y||\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = \vec{e} \cdot \vec{b}_1$ 进而得 $(y|x| + x|y|)|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| = 1$ ，再结合基本不等式求得 $|\vec{b}_1 - \vec{b}_2| \geq 2$ ，最后由 $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 2\vec{e}$ 平方即可求解。

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. 【答案】(1) 0.2；

(2) 0.1； (3) $|\mu_1 - \mu| = |\mu_2 - \mu|$ ，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 先由频率和为 1 解出 $a = 0.02$ ，再求是非常满意的概率即可；

(2) 分别求出 A 、 B 地区非常满意和不满意的概率，再由独立事件乘法公式求解即可；

(3) 由频率分布直方图求得 μ_1, μ_2 ，进而求出 μ ，计算求解即可。

【小问 1 详解】

由频率分布直方图知， $(0.005 + 0.015 + 0.03 + 0.03 + a) \times 10 = 1$ ，解得 $a = 0.02$ ，

则估计该乘客的满意程度等级是非常满意的概率为 $0.02 \times 10 = 0.2$ ；

【小问 2 详解】

从 A 地区随机抽取一名乘客，该乘客的满意程度等级是非常满意的概率为 $0.02 \times 10 = 0.2$ ，是不满意的概率为 $(0.005 + 0.015) \times 10 = 0.2$ ；

从 B 地区随机抽取一名乘客，该乘客的满意程度等级是非常满意的概率为 $0.015 \times 10 = 0.15$ ，是不满意的概率为 $(0.015 + 0.02) \times 10 = 0.35$ ；

则 $P(C) = 0.2 \times 0.35 + 0.2 \times 0.15 = 0.1$;

【小问 3 详解】

$|\mu_1 - \mu| = |\mu_2 - \mu|$, 理由如下: $\mu_1 = 55 \times 0.05 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.2 = 79.5$,

$\mu_2 = 55 \times 0.15 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.15 = 75$,

因 A, B 两地区人数比为 1:1, 则 $\mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 = 77.25$,

则 $|\mu_1 - \mu| = 2.25$, $|\mu_2 - \mu| = 2.25$, 则 $|\mu_1 - \mu| = |\mu_2 - \mu|$.

18. 【答案】(1) $B = \frac{\pi}{4}$

(2) 见解析 (3) 4

【解析】

【分析】(1) 利用余弦定理即可得解;

(2) 选①, 根据 $C = 2B$ 结合 (1) 求出 C, A , 可得 $A = B$, 则有 $\tan A = \tan B$, 再根据正弦定理化角为边即可得证;

选②, 利用正弦定理化边 角, 再结合 (1) 即可得出结论;

(3) 利用正弦定理求得 BC , 再利用三角形的面积公式结合诱导公式及倍角公式即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 因为 $b^2 - c^2 = a^2 - \sqrt{2}ac$,

所以 $b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

所以 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $B \in (0, \pi)$,

所以 $B = \frac{\pi}{4}$;

【小问 2 详解】

证明: 选①,

因为 $C = 2B$, $B = \frac{\pi}{4}$,

所以 $C = \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{\pi}{4} = B$,

所以 $\tan A = \tan B$, 即 $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B}$,

所以 $b \cos A = a \cos B$;

选②, 因为 $b \cos A = a \cos B$,

所以 $\sin B \cos A = \sin A \cos B$,

所以 $\sin B \cos A - \sin A \cos B = \sin(B - A) = 0$,

又 $A, B \in (0, \pi)$, 则 $B - A \in (-\pi, \pi)$,

所以 $B - A = 0$,

即 $A = B = \frac{\pi}{4}$,

所以 $C = \frac{\pi}{2} = 2B$;

【小问 3 详解】

解: 由 (1) 得 $\angle BCD = \frac{1}{2} \angle B = \frac{\pi}{8}$, 则 $\angle BDC = \frac{5\pi}{8}$,

因为 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{CD}{\sin B}$, 所以 $BC = 4\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{8}$

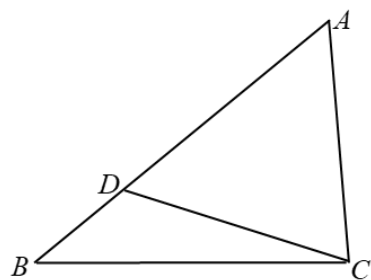
$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin \angle BCD$$

$$= 8\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$= 8\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$= 4\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 4,$$

所以 $\triangle BCD$ 的面积为 4.



19. 【答案】(1) 证明见解析, 距离为 $\sqrt{3}$;

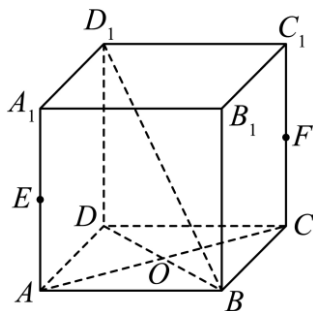
(2) 证明见解析;

【解析】

【分析】(1) 由 $AC \perp BD$ 及 $DD_1 \perp AC$ 即可证得 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ; 设 AC, BD 交于 O , CO 即为点 C 到平面 BDD_1 的距离, 再由三角形知识求解即可;

(2) 取 D_1D 中点 G , 先证得四边形 $AGFB$ 为平行四边形, 得到 $AG \parallel BF$, 进而证得 $D_1E \parallel BF$, 即可证得结论.

【小问 1 详解】



因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$, 又侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AC \subset$ 底面 $ABCD$, 则 $AA_1 \perp AC$,

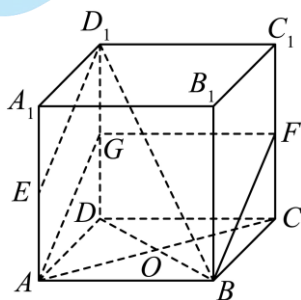
又 $DD_1 \parallel AA_1$, 所以 $DD_1 \perp AC$, 又 $DD_1 \cap BD = D$, $DD_1, BD \subset$ 平面 BDD_1 , 所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ;

设 AC, BD 交于 O , 则 CO 即为点 C 到平面 BDD_1 的距离, 又 $AB = 2, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 则

$$CO = AO = AB \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

即点 C 到平面 BDD_1 的距离为 $\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】



取 D_1D 中点 G , 连接 AG, FG, BF, D_1E , 易得 $GF \parallel AB, GF = AB$, 则四边形 $AGFB$ 为平行四边形, 则 $AG \parallel BF$, 又 $D_1E \parallel AG$, 则 $D_1E \parallel BF$, 所以 B, F, D_1, E 四点共面.

20. 【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 当 N 为 AD 中点时, $MN \parallel$ 平面 PAB .

【解析】

【分析】(1) 由线面平行的性质定理即可证明.

(2) 由面面垂直的性质定理证得 $BA \perp$ 平面 PAD , 又因为 $BA \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(3) 取 AD 的中点 N , 连接 CN, EN , 由线面平行的判定定理证明 $EN \parallel$ 平面 PAB , $CN \parallel$ 平面 PAB , 所以平面 $CNE \parallel$ 平面 PAB , 再由面面平行的性质定理可证得 $MN \parallel$ 平面 PAB .

【小问 1 详解】

$\because BC \parallel$ 平面 $PAD, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $BC \parallel AD$.

【小问 2 详解】

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$BA \perp AD$, 所以 $BA \perp$ 平面 PAD , 又因为 $BA \subset$ 平面 PAB ,

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

【小问 3 详解】

取 AD 的中点 N , 连接 CN, EN ,

E, N 分别为 PD, AD 的中点, 所以 $EN \parallel PA$,

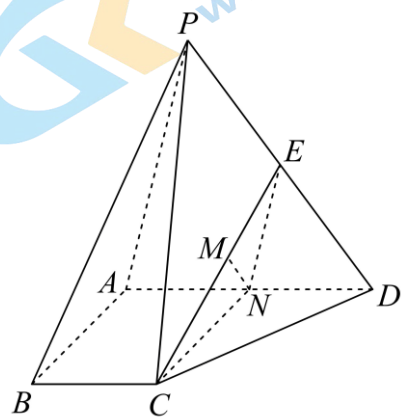
$EN \not\subset$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $EN \parallel$ 平面 PAB ,

又因为 $BC = \frac{1}{2}AD$, $BC \parallel AD$, 所以四边形 $ABCN$ 为平行四边形,

所以 $CN \parallel AB$, $CN \not\subset$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $CN \parallel$ 平面 PAB ,

$CN \cap NE$, 所以平面 $CNE \parallel$ 平面 PAB , 又因为 $MN \subset$ 平面 CNE , 所以 $MN \parallel$ 平面 PAB .

线段 AD 上存在点 N , 使得 $MN \parallel$ 平面 PAB .



21. 【答案】(1) $\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}$

(2) ①可能成立, 例子见解析; ②可能成立, 例子见解析; ③可能成立, 例子见解析; ④不可能成立, 证明过程见解析;

(3) 证明过程见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据题意写出含有 3 个元素的 2 划分即可;

(2) ①②③可以举出反例, ④可以利用反证法进行证明;

(3) 用反证法进行证明.

【小问 1 详解】

集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的所有不同的 2 划分为 $\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}$

【小问 2 详解】

①可能成立, 举例如下: $B_1 = \{x \in Q | x \leq 1\}$, $B_2 = \{x \in Q | x > 1\}$;

②可能成立, 举例如下: $B_1 = \{x \in Q | x < 1\}$, $B_2 = \{x \in Q | x \geq 1\}$;

③可能成立, 举例如下: $B_1 = \{x \in Q | x < \sqrt{2}\}$, $B_2 = \{x \in Q | x > \sqrt{2}\}$;

④不可能成立, 证明如下: 假设④成立, 不妨设 B_1 中元素的最大值为 s , B_2 中元素的最小值为 t , 由题可

知: $s < t$, 所以 $s < \frac{s+t}{2} < t$,

因为 s 为 B_1 中元素的最大值, 所以 $\frac{s+t}{2} \notin B_1$,

因为 t 为 B_2 中元素的最小值, 所以 $\frac{s+t}{2} \notin B_2$,

因为 $B_1 \cup B_2 = Q$, 所以 $\frac{s+t}{2} \notin Q$,

这与 $\frac{s+t}{2} \in Q$ 矛盾,

所以假设不成立, 即④不可能成立;

【小问 3 详解】

由于集合 A 中有 16 个元素, 所以 B_1, B_2, B_3 中至少有一个集合至少包含 6 个元素,

不妨设 B_1 中至少包含 6 个元素,

设 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \in B_1$, 且 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$,

假设对任意 $i \in \{1, 2, 3\}$, 对任意 $a, b \in B_i$, 都有 $b - a \notin B_i$,

那么 $b_6 - b_1, b_6 - b_2, b_6 - b_3, b_6 - b_4, b_6 - b_5 \notin B_1$,

又因为 $b_6 - b_1, b_6 - b_2, b_6 - b_3, b_6 - b_4, b_6 - b_5 \in A$,

所以 $b_6 - b_1, b_6 - b_2, b_6 - b_3, b_6 - b_4, b_6 - b_5 \in B_2 \cup B_3$,

则 B_2, B_3 中必有一个集合至少包含 $b_6 - b_1, b_6 - b_2, b_6 - b_3, b_6 - b_4, b_6 - b_5$ 中的 3 个元素,

不妨设这 3 个元素为 $a_1, a_2, a_3 \in B_2, a_1 < a_2 < a_3$,

由假设可知: $a_3 - a_1, a_3 - a_2, a_2 - a_1 \notin B_2$,

对任意 $i, j (1 \leq j < i \leq 3)$, 存在 $m, n (1 \leq m < n \leq 5)$,

都有 $a_i - a_j = b_6 - b_m - b_6 + b_n = b_n - b_m \notin B_1$,

又因为 $a_3 - a_1, a_3 - a_2, a_2 - a_1 \in B_3$, 而 $a_3 - a_1 - (a_3 - a_2) = a_2 - a_1$, 与假设矛盾,

所以假设不成立,

所以存在 $i \in \{1, 2, 3\}$, 存在 $a, b \in B_i$, 使得 $b - a \in B_i$

【点睛】对于集合新定义证明类题目, 要能正确理解题意, 再采取合适的方法进行求解, 列举法和反证法是经常使用的方法, 先假设条件不成立, 再通过逻辑推理得到矛盾, 从而证明出结论.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通