

2023 北京东直门中学高三 10 月月考

数 学

考试时间：120 分钟 总分：150 分

第一部分（选择题，共 40 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分. 在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

2. 若 $a < 1 < b$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{b}{a} > 1$
C. $a^2 < b^2$ D. $ab < a + b$

3. 已知向量 $\vec{a} = (-2, m)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 m 的值为 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$, 则 $AC =$ ()

- A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 2022 年 11 月 30 日, 神舟十四号航天员陈冬、刘洋、蔡旭哲和神舟十五号航天员费俊龙、邓清明、张陆顺利“会师太空”, 为记录这一历史时刻, 他们准备在天和核心舱合影留念. 假设人站成一排, 要求神舟十四号 3 名航天员互不相邻且刘洋不站在两端, 不同站法共有 ()

- A. 36 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 144 种

6. 已知函数 $f(x)$ 满足: ①对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$; ②对定义域内的任意 x , 都有 $f(x) = f(-x)$, 则符合上述条件的函数是 ()

- A. $f(x) = x^2 + |x| + 1$ B. $f(x) = \frac{1}{x} - x$ C. $f(x) = \ln|x+1|$ D. $f(x) = \cos x$

7. 若直线 $y = x + a$ 与函数 $f(x) = e^x$ 和 $g(x) = \ln x + b$ 的图象都相切, 则 $a + b =$ ()

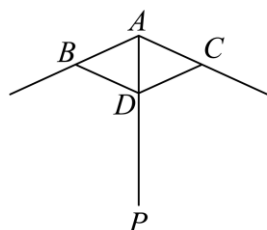
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

8. 设 d 、 S_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差与前 n 项和, 若 $S_{10} = S_{20}$, 则下列论断中正确的有 ()

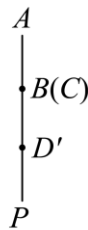
- A. 当 $n = 15$ 时, S_n 取最大值 B. 当 $n = 30$ 时, $S_n = 1$
C. 当 $d > 0$ 时, $a_{10} + a_{22} > 0$ D. 当 $d < 0$ 时, $|a_{10}| > |a_{22}|$

9. 我国油纸伞的制作工艺巧妙. 如图 (1), 伞不管是张开还是收拢, 伞柄 AP 始终平分同一平面内两条伞骨所成的角 $\angle BAC$, 且 $AB = AC$, 从而保证伞圈 D 能够沿着伞柄滑动. 如图 (2), 伞完全收拢时, 伞圈

D 已滑动到 D' 的位置, 且 A 、 B 、 D' 三点共线, $AD' = 40\text{cm}$, B 为 AD' 的中点, 当伞从完全张开到完全收拢, 伞圈 D 沿着伞柄向下滑动的距离为 24cm , 则当伞完全张开时, $\angle BAC$ 的余弦值是 ()



(1)



(2)

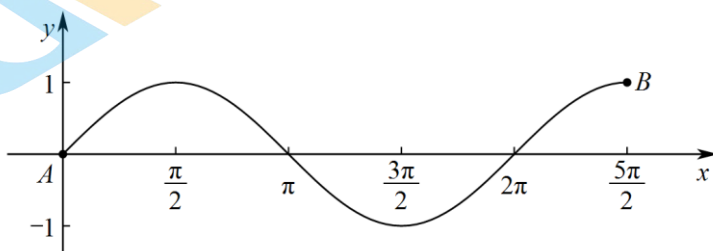
A. $-\frac{17}{25}$

B. $-\frac{4\sqrt{21}}{25}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $-\frac{8}{25}$

10. 如图, 曲线 C 为函数 $y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2})$ 的图象, 甲粒子沿曲线 C 从 A 点向目的地 B 点运动, 乙粒子沿曲线 C 从 B 点向目的地 A 点运动. 两个粒子同时出发, 且乙的水平速率为甲的 2 倍, 当其中一个粒子先到达目的地时, 另一个粒子随之停止运动. 在运动过程中, 设甲粒子的坐标为 (m, n) , 乙粒子的坐标为 (u, v) , 若记 $n - v = f(m)$, 则下列说法中正确的是 ()



A. $f(m)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上是增函数

B. $f(m)$ 恰有 2 个零点

C. $f(m)$ 的最小值为 -2

D. $f(m)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 中心对称

第二部分 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 (本大题共 5 小题, 共 25.0 分)

11. 设 i 为虚数单位, $1 - i = \frac{2 + ai}{1 + i}$, 则实数 $a =$ _____.

12. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n$, 则 $S_{17} =$ _____.

13. 已知角 α 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的正半轴重合, 将角 α 的终边按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后经过点 $(-1, \sqrt{3})$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} a + \frac{e}{x}, & x > 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ ，若存在三个互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 ，使得

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{f(x_3)}{x_3} = -e \text{ 成立，则 } a \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$. 给出下列四个结论：

① 数列 $\{a_n\}$ 每一项 a_n 都满足 $0 < a_n \leq 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ；② 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < 2$ ；

③ 数列 $\{a_n\}$ 每一项都满足 $a_n \leq \frac{2}{n+1}$ 成立；④ 数列 $\{a_n\}$ 每一项 a_n 都满足 $a_n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

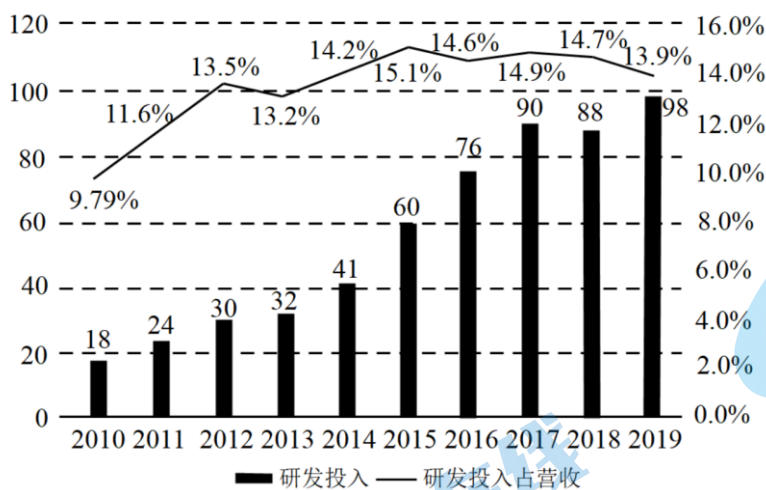
其中，所有正确结论的序号是 .

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；
- (2) 求函数的最大值及取得最大值时自变量 x 的取值集合；
- (3) 求函数的单调递减区间.

17. 科技创新能力是决定综合国力和国际竞争力的关键因素，也是推动经济实现高质量发展的重要支撑，而研发投入是科技创新的基本保障，下图是某公司从 2010 年到 2019 年这 10 年研发投入的数据分布图：



其中折线图是该公司研发投入占当年总营收的百分比，条形图是当年研发投入的数值(单位:十亿元).

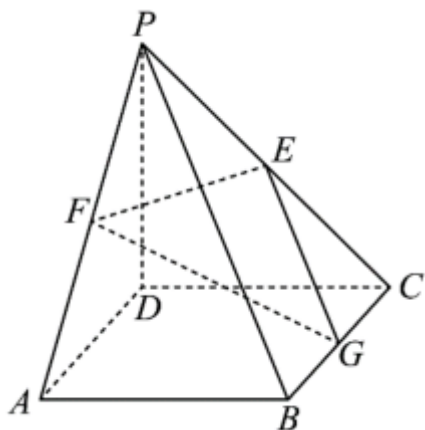
(I) 从 2010 年至 2019 年中随机选取一年，求该年研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 的概率；

(II) 从 2010 年至 2019 年中随机选取两个年份，设 X 表示其中研发投入超过 500 亿元的年份的个数，求 X 的分布列和数学期望；

(III) 根据图中的信息，结合统计学知识，判断该公司在发展的过程中是否比较重视研发，并说明理由.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PD = AB$ ，点 E 、

F 、 G 分别为 PC 、 PA 、 BC 的中点.



- (1) 求证: $FG \parallel$ 平面 PCD ;
- (2) 求平面 EFG 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值;
- (3) 求直线 DE 与平面 EFG 所成角的大小.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴的两个端点分别为 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) P 为椭圆 C 上异于 A, B 的动点, 直线 AP, PB 分别交直线 $x = -6$ 于 M, N 两点, 连接 NA 并延长交椭圆 C 于点 Q .
 - (i) 求证: 直线 AP, AN 的斜率之积为定值;
 - (ii) 判断 M, B, Q 三点是否共线, 并说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = e^x - a \sin x$.

- (1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 当 $a = 1$ 时, 证明: 函数 $y = f(x) - 2$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点;
- (3) 若对任意 $x \in [0, \pi]$, 不等式 $f(x) \geq 2 - \cos x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. 设正整数 $n \geq 3$, 集合 $A = \{\vec{a} | \vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n\}$, 对于集合 A 中的任意元素

$\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 及实数 λ , 定义: 当且仅当 $x_k = y_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 时 $\vec{a} = \vec{b}$;

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$; $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$. 若 A 的子集 $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ 满足: 当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时, $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, \dots, 0)$, 则称 B 为 A 的完美子集.

- (1) 当 $n = 3$ 时, 已知集合 $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6)\}$. 分别判断这两个集合是否为 A 的完美子集, 并说明理由;

(2) 当 $n=3$ 时, 已知集合 $B=\{(2m, m, m-1), (m, 2m, m-1), (m, m-1, 2m)\}$. 若 B 不是 A 的完美子集, 求 m 的值;

(3) 已知集合 $B=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \subseteq A$, 其中 $\vec{a}_i=(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) (i=1, 2, 3)$. 若 $2|x_{ii}| > |x_{i1}| + |x_{i2}| + |x_{i3}|$ 对任意 $i=1, 2, 3$ 都成立, 判断 B 是否一定为 A 的完美子集. 若是, 请说明理由; 若不是, 请给出反例.

参考答案

第一部分（选择题，共 40 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分. 在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 【答案】D

【分析】根据并集运算求解.

【详解】因为集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$,
所以 $A \cup B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$,
故选:D.

2. 【答案】D

【分析】举反例说明 ABC 错误，利用作差法证明 D 正确.

【详解】当 $a = -2, b = 2$ 时满足 $a < 1 < b$,

所以 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \frac{1}{b}$, 所以 A 错误,

所以 $\frac{b}{a} = -1 < 1$, 故 B 错误,

所以 $a^2 = 4 = b^2$, 故 C 错误,

因为 $ab - (a + b) = (a - 1)(b - 1) - 1$, 又 $a < 1 < b$,

所以 $(a - 1)(b - 1) - 1 < 0 - 1 < 0$,

所以 $ab < a + b$,

故选: D.

3. 【答案】B

【分析】由 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 即可列等式解出 m

【详解】由题可知, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 - 2m = 0$, 解得 $m = -1$.

故选: B

4. 【答案】A

【分析】利用正弦定理即可求解

【详解】根据正弦定理有 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, 结合 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$,

则 $AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$.

故选: A

5. 【答案】C

【分析】利用插空法和间接法可求出结果.

【详解】神舟十四号 3 名航天员互不相邻的排法种数有 $A_3^3 \cdot A_4^3 = 144$ 种,

其中刘洋站在两端的排法种数有 $A_3^3 \cdot 2A_3^2 = 72$ 种,

故符合题意的排法种数有 $144 - 72 = 72$.

故选: C

6. 【答案】A

【分析】由题意得: $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增. 对于 A, 是偶函数, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, 符合题意; 对于 B, 函数 $f(x)$ 是奇函数, 不合题意; 对于 C, 函数 $f(x)$ 不是偶函数, 不合题意; 对于 D, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 无单调性, 不合题意.

【详解】由题意得: $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

对于 A, $f(-x) = f(x)$, 是偶函数,

且 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + x + 1$, 对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, 符合题意;

对于 B, 函数 $f(x)$ 是奇函数, 不合题意;

对于 C, 由 $x+1=0$, 解得: $x \neq -1$,

定义域不关于原点对称, 故函数 $f(x)$ 不是偶函数, 不合题意;

对于 D, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 无单调性, 不合题意;

故选: A

【点睛】本题考查了函数的单调性和奇偶性问题, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7. 【答案】D

【分析】由切线方程得出切线斜率, 进而可由函数的导数求出切点坐标, 将两个函数的切点分别代入切线方程中, 求出 $a+b$.

【详解】设直线 $y = x + a$ 与函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象分别相切于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则由 $f(x) = e^x$, 得 $f'(x) = e^x$, 令 $e^{x_1} = 1$, 得 $x_1 = 0, y_1 = 1$,

将 $(0, 1)$ 代入 $y = x + a$ 中得 $a = 1$,

由 $g(x) = \ln x + b$, 得 $g'(x) = \frac{1}{x}$, 令 $\frac{1}{x_2} = 1$, 得 $x_2 = 1, y_2 = b$,

将 $(1, b)$ 代入 $y = x + 1$ 中得 $b = 2$,

所以 $a + b = 3$.

故选: D

8. 【答案】C

【分析】

首先根据 $S_{10} = S_{20}$ 得到 $a_1 = -\frac{29}{2}d$ ，再依次判断选项即可得到答案.

【详解】 $\because S_{10} = S_{20}$ ， $\therefore 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 20a_1 + \frac{20 \times 19}{2}d$ ，解得 $a_1 = -\frac{29}{2}d$ ，

对选项 A， $\because$ 无法确定 a_1 和 d 的正负性， $\therefore$ 无法确定 S_n 是否有最大值，故 A 错误，

对选项 B， $S_{30} = 30a_1 + \frac{30 \times 29}{2}d = 30 \times (-\frac{29}{2}d) + 15 \times 29d = 0$ ，故 B 错误，

对选项 C， $a_{10} + a_{22} = 2a_{16} = 2(a_1 + 15d) = 2(-\frac{29}{2}d + 15d) = d > 0$ ，故 C 正确，

对选项 D， $a_{10} = a_1 + 9d = -\frac{29}{2}d + \frac{18}{2}d = -\frac{11}{2}d$ ， $a_{22} = a_1 + 21d = -\frac{29}{2}d + \frac{42}{2}d = \frac{13}{2}d$ ，

$\because d < 0$ ， $\therefore |a_{10}| = -\frac{11}{2}d$ ， $|a_{22}| = -\frac{13}{2}d$ ， $|a_{10}| < |a_{22}|$ ，故 D 错误，

故选：C.

9. 【答案】A

【分析】求出 AB 、 BD 、 AD 的长，利用余弦定理求出 $\cos \angle BAD$ ，再利用二倍角的余弦公式可求得 $\cos \angle BAC$ 的值.

【详解】依题意分析可知，当伞完全张开时， $AD = 40 - 24 = 16(\text{cm})$ ，

因为 B 为 AD' 的中点，所以， $AB = AC = \frac{1}{2}AD' = 20(\text{cm})$ ，

当伞完全收拢时， $AB + BD = AD' = 40(\text{cm})$ ，所以， $BD = 20(\text{cm})$ ，

在 $\triangle ABD$ 中， $\cos \angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{400 + 256 - 400}{2 \times 20 \times 16} = \frac{2}{5}$ ，

所以， $\cos \angle BAC = \cos(2\angle BAD) = 2\cos^2 \angle BAD - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{17}{25}$.

故选：A.

10. 【答案】B

【分析】由题意得到 $f(m) = 2\sin^2 m + \sin m - 1$ 逐项判断.

【详解】解：由题意得： $n = \sin m$ ， $v = \sin u = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2m\right) = \cos 2m$ ，

所以 $f(m) = n - v = \sin m - \cos 2m = 2\sin^2 m + \sin m - 1$ ，

由 $\begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{5\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{5\pi}{2} - 2m \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$ 得 $0 \leq m \leq \frac{5\pi}{4}$ ，

令 $t = \sin m$ ，则 $y = 2t^2 + t - 1$ ，因为 $t = \sin m$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上递减， $y = 2t^2 + t - 1$ 在 $(0, 1)$ 上递增，

所以 $f(m)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上是减函数，故 A 错误；

令 $f(m) = 2\sin^2 m + \sin m - 1 = 0$ ，得 $\sin m = \frac{1}{2}$ 或 $\sin m = -1$ ，解得 $m = \frac{\pi}{6}$ 或 $m = \frac{5\pi}{6}$ ，故 B 正确；

因为 $y = 2t^2 + t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ ， $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ ，所以 $f(m)$ 的最小值为 $-\frac{9}{8}$ ，故 C 错误；

因为 $y = 2t^2 + t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ ， $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ ，关于 $t = -\frac{1}{4}$ 对称，是轴对称图形，

所以 $f(m)$ 不可能关于点 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 中心对称，故 D 错误；

故选：B

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 【答案】0

【分析】首先根据题意得到 $(1-i)(1+i) = 2+ai = 2$ ，再根据复数相等概念求解即可。

【详解】因为 $1-i = \frac{2+ai}{1+i}$ ，所以 $(1-i)(1+i) = 2+ai = 2$ ，解得 $a = 0$ 。

故答案为：0

12. 【答案】9

【分析】利用并项求和法计算即可。

【详解】由 $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n$ ，

得 $S_{17} = (1-2) + (3-4) + \cdots + (15-16) + 17 = -1 \times 8 + 17 = 9$ 。

故答案为：9。

13. 【答案】1

【分析】

由题意利用任意角的三角函数的定义，先求得 α 的值，可得 $\sin \alpha$ 的值。

【详解】 $\because$ 角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的正半轴重合，

将角 α 的终边按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后经过点 $(-1, \sqrt{3})$ ，

$\therefore \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ， $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

所以 $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ， $\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ 。

故答案为：1.

【点睛】本题考查已知终边上一点求三角函数值的问题，涉及到三角函数的定义，是一道容易题.

14. 【答案】 $(-\infty, -2e)$

【分析】根据题意，将方程根问题转化为函数交点问题，然后结合导数求得最值，即可得到结果.

【详解】若存在三个互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 ，使得 $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{f(x_3)}{x_3} = -e$ 成立，则方程

$f(x) = -ex$ 存在三个不相等的实根，当 $x < 0$ 时， $e^{-x} = -ex$ 解得 $x = -1$ ，所以当 $x > 0$ 时， $a + \frac{e}{x} = -ex$

有两个不等的实根，即 $a = -ex - \frac{e}{x}$ ，设 $g(x) = -ex - \frac{e}{x}$ ， $x > 0$ ，

则 $g'(x) = -e + \frac{e}{x^2}$ ， $x > 0$ ，令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ ，令 $g'(x) > 0$ ，解得 $0 < x < 1$ ，令 $g'(x) < 0$ ，

解得 $x > 1$ ，所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递增，在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减，则

$g(x) \leq g(1) = -e - e = -2e$ ，所以 $a < -2e$.

故答案为： $(-\infty, -2e)$

15. 【答案】①③④

【分析】通过递推公式，判断出数列单调性，由此得到数列的取值范围，根据取值范围对①③④进行判断，算出 S_4 即可判断②.

【详解】由 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$ ，

得 $a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ， $a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ ， $a_4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{64} = \frac{39}{128}$ ，

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{39}{128} = \frac{279}{128} > 2$ ，②错误；

$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \leq a_n$ ，

又因为 $a_1 = 1$ ，所以 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 > 0$ ，所以 $0 < a_n \leq 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，①正确；

由 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2}a_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ，即 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \in (1, 2]$ ，

又 $\frac{1}{2}a_n^2 = a_n - a_{n+1}$ ，两边同时除以 $a_n a_{n+1}$ ，可得：

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right)$ ， $\frac{a_{n-1}}{a_n} = 2 \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right)$ ， $\dots$ ， $\frac{a_1}{a_2} = 2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right)$ ，

累加可得 $2\left(\frac{1}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \cdots + \frac{a_1}{a_2}$,

又因 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \in (1, 2]$,

所以 $n < 2\left(\frac{1}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 2n$, 即有 $\frac{1}{n+1} \leq a_{n+1} < \frac{2}{n+2}$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{2}{1+1} = 1$, 所以 $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$, ③正确;

由 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$, 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2}a_n \geq \frac{1}{2}$,

则当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{1}{2}$,

则 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$,

所以 $a_n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 故④正确.

故答案为: ①③④.

【点睛】思路点睛: 数列中出现大小比较时, 若通过原数列或者构造新数列不能找到大小关系, 常见思路为对数列进行放缩, 通过将数列放缩为一个简单的通项公式再进行大小比较.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

16. 【答案】(1) π

(2) 函数的最大值为 2, 取得最大值时自变量 x 的取值集合为 $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(3) $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

【分析】(1) 利用三角恒等变换公式求出函数 $f(x)$ 的解析式即可求解;

(2) 利用正弦函数的性质求最大值;

(3) 利用正弦函数的性质求单调递减区间.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + 1 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1, \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

【小问 2 详解】

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

时函数 $f(x)$ 取得最大值为 2,

所以函数的最大值为 2,

取得最大值时自变量 x 的取值集合为 $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

【小问 3 详解】

当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

17. 【答案】(I) $\frac{9}{10}$; (II) $E(X) = 1$, 分布列如下:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

(III) 2010 年到 2019 年共 10 年中, 研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 有 9 年, 每年基本上都在增加, 因此公司在发展的过程中重视研发.

【分析】

(I) 折线图中 2010 年到 2019 年共 10 年中, 2010 年公司研发投入占当年总营收的百分比在 10% 以下

(II) 2010 年到 2019 年共 10 年中, 研发投入超过 500 亿元的有 5 年, X 的取值可能为 0, 1, 2, 超几何分布求概率.

(III) 图中信息 10 年中, 研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 有 9 年, 每年基本上都在增加, 判断公司在发展的过程中比较重视研发.

【详解】(I) 由题知, 2010 年到 2019 年共 10 年中, 研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 有 9 年, 设从 2010 年至 2019 年中随机选取一年, 求该年研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 为事件 A,

$$\therefore P(A) = \frac{9}{10}.$$

(II) 由题意得 X 的取值可能为 0, 1, 2

$$P(X=0) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=1)=\frac{C_5^1 \cdot C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}.$$

X 的分布列为

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(X)=0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = 1.$$

(III) 2010 年到 2019 年共 10 年中, 研发投入占当年总营收的百分比超过 10% 有 9 年, 每年基本上都在增加, 因此公司在发展的过程中重视研发.

【点睛】超几何分布的特征.

(1) 考查对象分两类; (2) 已知各类对象的个数; (3) 从中抽取若干个个体, 考查某类个体数 X 的概率分布. 求离散型随机变量分布列的步骤.

18. **【答案】**(1) 证明见解析

$$(2) \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(3) \frac{\pi}{3}$$

【分析】以点 D 为坐标原点, 利用向量法分别求解即可.

【小问 1 详解】

如图, 以点 D 为坐标原点,

不妨设 $AD=2$,

则 $F(1,0,1), G(1,2,0)$, 故 $\overrightarrow{FG}=(0,2,-1)$,

因为 x 轴 $\perp$ 平面 PCD ,

则可取平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$,

所以 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FG}=0$, 所以 $\vec{n} \perp \overrightarrow{FG}$,

又 $FG \not\subset$ 平面 PCD ,

所以 $FG \parallel$ 平面 PCD ;

【小问 2 详解】

$E(0,1,1)$, 则 $\overrightarrow{FE}=(-1,1,0)$,

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

则有 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{FG} = 2y - z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{FE} = -x + y = 0 \end{cases}$, 令 $y=1$, 则 $z=2, x=1$,

所以 $\vec{m} = (1, 1, 2)$,

因为 y 轴 $\perp$ 平面 PCD ,

则可取平面 PAD 的法向量为 $\vec{a} = (0, 1, 0)$,

则 $\cos \langle \vec{m}, \vec{a} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{a}}{|\vec{m}| |\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

所以平面 EFG 与平面 PAD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$;

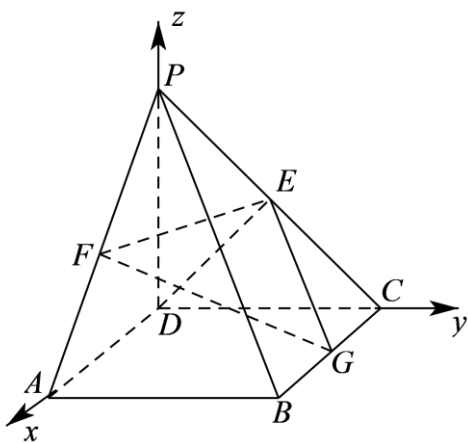
【小问 3 详解】

连接 DE , $\overrightarrow{DE} = (0, 1, 1)$,

设直线 DE 与平面 EFG 所成的角为 $\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

则 $\sin \theta = \cos \langle \overrightarrow{DE}, \vec{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \vec{m}}{|\overrightarrow{DE}| |\vec{m}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以直线 DE 与平面 EFG 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.



19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) (i) 证明见解析; (ii) 是, 理由见解析.

【分析】(1) 根据长轴的两个端点分别为 $A(-2, 0), B(2, 0)$ 和离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 由 $a=2, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 求解;

(2) (i) 设 $P(x_0, y_0)$, 则直线 AP 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0+2}$, 直线 BP 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0-2}$, 再由直线的交点, 求得

点 N 的坐标，进而得到直线 AN 的斜率，然后结合 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ 运算即可；(ii) 设直线 AP 斜率为 k ，易得 M 的坐标，再由 (i) 得到直线 AN 斜率为 $-\frac{1}{2k}$ ，写出直线 AN 的方程，与椭圆方程联立，求得 Q 点的坐标，再判断直线 k_{BQ} 与 k_{BM} 是否相等即可。

【详解】(1) 由题意得 $a=2, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $c=\sqrt{3}, b^2=a^2-c^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) (i) 证明：设 $P(x_0, y_0)$,

因为 P 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$.

因为直线 AP 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0+2}$ ，直线 BP 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0-2}$,

所以直线 BP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

所以 N 点的坐标为 $N(-6, \frac{-8y_0}{x_0-2})$.

所以直线 AN 的斜率为 $\frac{\frac{-8y_0}{x_0-2}}{-6+2} = \frac{2y_0}{x_0-2}$.

所以直线 AP, AN 的斜率之积为：

$$\frac{y_0}{x_0+2} \cdot \frac{2y_0}{x_0-2} = \frac{2y_0^2}{x_0^2-4} = \frac{2\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)}{x_0^2-4} = -\frac{1}{2}.$$

(ii) M, B, Q 三点共线.

设直线 AP 斜率为 k ，易得 $M(-6, -4k)$.

由 (i) 可知直线 AN 斜率为 $-\frac{1}{2k}$ ，所以直线 AN 的方程为 $y = -\frac{1}{2k}(x+2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \\ x = -2ky - 2, \end{cases} \text{ 可得 } (4+4k^2)y^2 + 8ky = 0.$$

解得 Q 点的纵坐标为 $\frac{-2k}{1+k^2}$,

所以 Q 点的坐标为 $Q(\frac{2k^2-2}{1+k^2}, \frac{-2k}{1+k^2})$.

所以, 直线 BQ 的斜率为 $\frac{\frac{-2k}{1+k^2}-0}{\frac{2k^2-2}{1+k^2}-2} = \frac{k}{2}$, 直线 BM 的斜率为 $\frac{-4k-0}{-6-2} = \frac{k}{2}$.

因为直线 BQ 的斜率等于直线 BM 的斜率,

所以 M, B, Q 三点共线.

【点睛】方法点睛: 求定值问题常见的方法有两种: ①从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关. ②直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

20. **【答案】**(1) $x+y-1=0$;

(2) 证明见解析; (3) $(-\infty, 1]$.

【分析】(1) 根据导数几何意义可求得切线斜率 $f'(0)$, 结合 $f(0)=1$ 可得切线方程;

(2) 令 $g(x)=f(x)-2$, 求导后可知 $g'(x)>0$, 由此确定 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 结合零点存在定理可得结论;

(3) $h(x)=f(x)-2+\cos x$, 将问题转化为 $h(x)\geq 0$ 恒成立; 求导后, 分析可知当 $a\geq 0$ 时, $h'(x)$ 单调递增; 当 $a>1$ 时, 利用零点存在定理可说明 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 由此可得 $h(x)<h(0)=0$, 知不合题意; 当 $a=1$ 时, 可得 $h'(x)>h'(0)=0$, 知 $h(x)$ 单调递增, 满足题意; 当 $a<1$ 时, 采用放缩法得 $h(x)>e^x-\sin x+\cos x-2$, 结合 $a=1$ 时的结论可知其满足题意; 综合三种情况可得结果.

【小问 1 详解】

当 $a=2$ 时, $f(x)=e^x-2\sin x$, 则 $f'(x)=e^x-2\cos x$,

$\therefore f'(0)=1-2=-1$, 又 $f(0)=1$,

$\therefore f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为: $y=-x+1$, 即 $x+y-1=0$.

【小问 2 详解】

当 $a=1$ 时, 令 $g(x)=f(x)-2=e^x-\sin x-2$, 则 $g'(x)=e^x-\cos x$;

当 $x\in(0, \pi)$ 时, $e^x>e^0=1$, $\cos x<1$, 即 $g'(x)>0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 又 $g(0)=1-2=-1<0$, $g(\pi)=e^\pi-2>0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点, 即 $f(x)-2$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有一个零点.

【小问 3 详解】

令 $h(x)=f(x)-2+\cos x=e^x-a\sin x+\cos x-2$,

则对任意 $x\in[0, \pi]$, $h(x)\geq 0$ 恒成立; 又 $h'(x)=e^x-a\cos x-\sin x$,

令 $t(x) = h'(x)$, 则 $t'(x) = e^x + a \sin x - \cos x$;

当 $a \geq 0$ 时, 若 $x \in [0, \pi]$, 则 $e^x \geq e^0 = 1$, $\cos x \leq 1$, $\sin x \geq 0$,

$\therefore t'(x) \geq 0$ 在 $[0, \pi]$ 上恒成立, 则 $h'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增;

①当 $a > 1$ 时, $h'(0) = 1 - a < 0$, $h'(\pi) = e^\pi + a > 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (0, \pi)$, 使得 $h'(x_0) = 0$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 此时 $h(x) < h(0) = 0$, 不合题意;

②当 $a = 1$ 时, $h(x) = e^x - \sin x + \cos x - 2$;

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $h'(x) > h'(0) = 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

$\therefore h(x) \geq h(0) = 0$ 恒成立, 满足题意;

③当 $a < 1$ 时, $h(x) = e^x - a \sin x + \cos x - 2 > e^x - \sin x + \cos x - 2$,

由②知: 对任意 $x \in [0, \pi]$, $h(x) > e^x - \sin x + \cos x - 2 \geq 0$, 满足题意;

综上所述: 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

【点睛】关键点点睛: 利用导数几何意义求解切线方程、函数零点个数问题、恒成立问题的求解; 本题求解恒成立问题的关键是通过构造函数的方式, 将问题转化为含参数函数单调性的讨论问题, 进而由单调性和函数最值确定满足题意的参数范围.

21. 【答案】(1) B_1 是 A 的完美子集, B_2 不是 A 的完美子集

(2) $m = \frac{1}{4}$

(3) B 一定为 A 的完美子集, 理由见解析

【分析】(1) 根据完美子集得定义, 设 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, 0)$, 列出方程组求得 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 即可判断;

(2) 由题意存在 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, 使得 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, 0)$, 列出方程组, 解方程组求出 m 的值即可求解;

(3) 假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, 0)$, 不妨设 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, 则 $\lambda_1 \neq 0$, 由 $\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \lambda_3 x_{31} = 0$ 结合已知条件即可得出结论.

【小问 1 详解】

$$B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$\text{即 } \vec{a}_1 = (1, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 0), \vec{a}_3 = (0, 0, 1),$$

$$\text{所以 } \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1)$$

$$= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0),$$

所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

所以 B_1 是 A 的完美子集,

$$B_2 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6)\},$$

$$\text{即 } \vec{a}_1 = (1, 2, 3), \vec{a}_2 = (2, 3, 4), \vec{a}_3 = (4, 5, 6),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 &= \lambda_1 (1, 2, 3) + \lambda_2 (2, 3, 4) + \lambda_3 (4, 5, 6) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3, 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

所以 B_2 不是 A 的完美子集;

【小问 2 详解】

$$\text{由 } B = \{(2m, m, m-1), (m, 2m, m-1), (m, m-1, 2m)\}$$

$$\text{得 } \vec{a}_1 = (2m, m, m-1), \vec{a}_2 = (m, 2m, m-1), \vec{a}_3 = (m, m-1, 2m),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 &= \lambda_1 (2m, m, m-1) + \lambda_2 (m, 2m, m-1) + \lambda_3 (m, m-1, 2m) \\ &= (2m\lambda_1 + m\lambda_2 + m\lambda_3, m\lambda_1 + 2m\lambda_2 + (m-1)\lambda_3, (m-1)\lambda_1 + (m-1)\lambda_2 + 2m\lambda_3), \end{aligned}$$

因为 B 不是 A 的完美子集,

$$\text{所以存在 } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0), \text{ 使得 } \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, 0),$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2m\lambda_1 + m\lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ m\lambda_1 + 2m\lambda_2 + (m-1)\lambda_3 = 0 \\ (m-1)\lambda_1 + (m-1)\lambda_2 + 2m\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

由集合的互异性可得 $2m \neq m$ 且 $2m \neq m-1$ 且 $m \neq m-1$,

所以 $m \neq 0$ 且 $m \neq -1$,

$$\text{由 } 2m\lambda_1 + m\lambda_2 + m\lambda_3 = 0, \text{ 得 } 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$\text{所以 } \lambda_3 = -2\lambda_1 - \lambda_2, (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} m\lambda_1 + 2m\lambda_2 + (m-1)(-2\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ (m-1)\lambda_1 + (m-1)\lambda_2 + 2m(-2\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} (-m+2)\lambda_1 + (m+1)\lambda_2 = 0 \\ (-3m-1)\lambda_1 + (-m-1)\lambda_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{所以 } (-4m+1)\lambda_1 = 0, \text{ 所以 } m = \frac{1}{4} \text{ 或 } \lambda_1 = 0,$$

$$\text{当 } m = \frac{1}{4} \text{ 时, } \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{3}{4}\lambda_3 = 0 \\ -\frac{3}{4}\lambda_1 - \frac{3}{4}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -7 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

$$\text{所以存在 } \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -7 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}, \text{ 使得 } \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, 0),$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 因为 $m \neq -1$, 所以 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, 不符题意,

$$\text{所以 } m = \frac{1}{4};$$

【小问 3 详解】

B 一定为 A 的完美子集,

假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = (0, 0, 0)$,

不妨设 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, 则 $\lambda_1 \neq 0$, 否则与假设矛盾,

由 $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, 其中 $\vec{a}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) (i=1, 2, 3)$,

$$\text{得 } \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \lambda_3 x_{31} = 0, \text{ 则 } x_{11} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_{21} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_{31},$$

$$\text{所以 } |x_{11}| \leq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| |x_{21}| + \left| \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right| |x_{31}| \leq |x_{21}| + |x_{31}|,$$

这与 $2|x_{11}| > |x_{11}| + |x_{21}| + |x_{31}|$, 即 $|x_{11}| > |x_{21}| + |x_{31}|$ 矛盾,

所以假设不成立,

所以 $\lambda_1 = 0$, 所以 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$,

所以 B 一定为 A 的完美子集.

【点睛】关键点点睛: 求解集合新定义运算有关的题目, 关键是理解和运用新定义的概念以及运算, 利用化归和转化思想, 将不熟悉的数学问题转化为熟悉的问题求解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

