

2021 北京大兴高二（上）期末

数 学

150 分,考试时长 120 分钟.

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 在平面直角坐标系中,斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线倾斜角为 ()

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$, 则 a_6 的值为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 3 D. 6

3. 经过点 $(1,0)$ 且与直线 $x-2y+1=0$ 垂直 直线方程为 ()

- A. $x-2y-1=0$ B. $2x-y-2=0$
C. $2x+y-2=0$ D. $2x+y-1=0$

4. 某班级举办投篮比赛,每人投篮两次.若小明每次投篮命中的概率都是 0.6,则他至少投中一次的概率为 ()

- A. 0.24 B. 0.36 C. 0.6 D. 0.84

5. 已知空间向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, 则向量 $\vec{a}$ 在坐标平面 Oxy 上的投影向量是 ()

- A. $(1, 2, 0)$ B. $(1, 0, 3)$ C. $(0, 2, 3)$ D. $(1, 0, 0)$

6. 已知圆 C 经过原点, 且其圆心在直线 $x-y-2=0$ 上, 则圆 C 半径的最小值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

7. 我国古代数学名著《九章算术》中有如下“两鼠穿墙”问题: 有两只老鼠同时从墙的两面相对着打洞穿墙.大老鼠第一天打进11尺,以后每天进度是前一天的2倍.小老鼠第一天也打进1尺,以后每天进度是前一天的一半.如果墙的厚度为10尺,则两鼠穿透此墙至少在第 ()

- A. 3天 B. 4天 C. 5天 D. 6天

8. 已知点 M 在抛物线 $y^2 = 8x$ 上, F 为抛物线的焦点, 直线 FM 交 y 轴于点 N . 若 M 为线段 FN 的中点, 则

$|FN| =$ ()

- A. 3 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. 12

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 则椭圆 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^{n+1} - 2$, 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*, \lambda a_n \leq 4 + S_{2n}$ 恒成立, 则实数 λ 的最大值是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

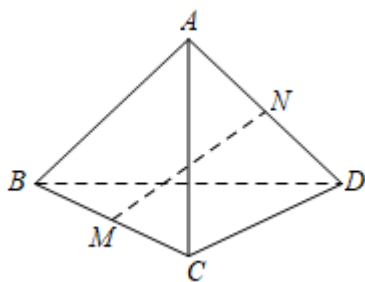
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线方程是_____.

12. 已知入射光线经过点 $M(0,1)$ 被 x 轴反射, 反射光线经过点 $N(2,1)$, 则反射光线所在直线的方程为_____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 中能构成等比数列的三项可以为_____. (只需写出一组)

14. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 其棱长均为 1, M, N 分别为 BC, AD 的中点. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$, 则 $x + y + z =$ _____; 直线 MN 和 CD 的夹角为_____.



15. 将一枚均匀的硬币连续抛掷 n 次, 以 P_n 表示没有出现连续 3 次正面的概率. 给出下列四个结论:

① $P_3 = \frac{7}{8}$;

② $P_4 = \frac{15}{16}$;

③ 当 $n \geq 2$ 时, $P_{n+1} < P_n$;

④ $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2} + \frac{1}{8}P_{n-3} (n \geq 4)$.

其中, 所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

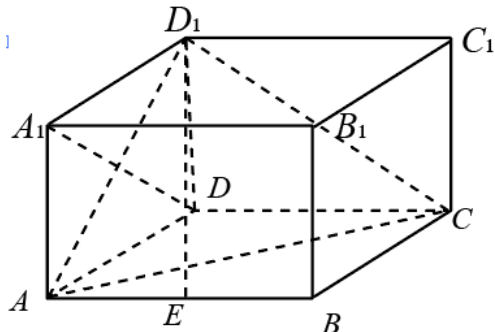
16. 从 2 名男生(记为 B_1 和 B_2)和 3 名女生(记为 G_1 , G_2 , 和 G_3)组成的总体中，任意依次抽取 2 名学生.

- (1) 分别写出有放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样 样本空间;
- (2) 在 (1) 中的两种抽样方式下，分别求出抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生的概率.

17. 已知前 n 项和为 S_n 的数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 5$.

- (1) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列， $S_3 = 35$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列， $S_5 = S_6$ ，求 S_n 的最大值.

18. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD = AA_1 = 1$ ， $AB = 2$ ， E 为 AB 的中点.



- (1) 证明: $D_1E \perp A_1D$;
- (2) 求点 E 到平面 ACD_1 的距离;
- (3) 求平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角的余弦值.

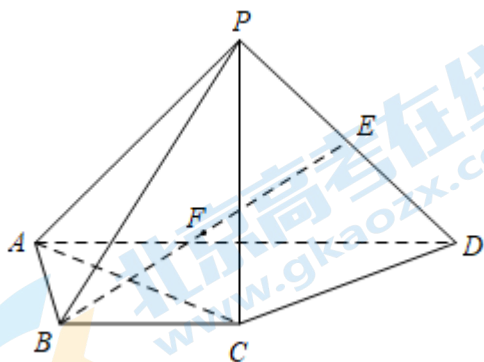
19. 已知直线 $l_1: 2x - y + 2 = 0$ 与直线 $l_2: x - ay - 2 = 0$, $a \in \mathbf{R}$

(1) 若 $l_1 \parallel l_2$, 求 a 的值;

(2) 求证: 直线 l_2 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 恒有公共点;

(3) 若直线 l_2 与圆心为 C 的圆 $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 求 a 的值.

20. 如图四棱锥 $P - ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边 等腰直角三角形, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AD = 2AB = 2BC = 2$, $PC = \sqrt{2}$, E 为 PD 的中点.



(1) 求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值;

(2) 设 F 是 BE 中点, 判断点 F 是否在平面 PAC 内, 并证明结论.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 2 倍, 焦距是 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 $l: x - my - 4 = 0$ 与椭圆 C 交于两个不同点 D, E , 以线段 DE 为直径的圆经过原点, 求实数 m 的值;

(3) 设 A, B 为椭圆 C 的左、右顶点, H 为椭圆 C 上除 A, B 外任意一点, 线段 BH 的垂直平分线分别交直线 BH 和直线 AH 于点 P 和点 Q , 分别过点 P 和 Q 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 M 和 N , 求证: 线段 MN 的长为定值.

2021 北京大兴高二（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】B

【解析】

【分析】

根据斜率的定义，由直线的斜率，即可求出倾斜角.

【详解】设所求直线的倾斜角为 θ ，其中 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ ，

因为该直线的斜率为 $\sqrt{3}$ ，

所以 $\tan \theta = \sqrt{3}$ ，则 $\theta = 60^\circ$.

故选：B.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】

由题中条件，根据递推公式，逐步计算，即可得出结果.

【详解】因为 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ，所以 $a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{1}{2}$ ， $a_3 = \frac{a_2}{1+a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ ，

$$a_4 = \frac{a_3}{1+a_3} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{a_4}{1+a_4} = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}, \quad a_6 = \frac{a_5}{1+a_5} = \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{1}{6}.$$

故选：A.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】

先由垂直关系，求出所求直线 斜率，再由直线的点斜式方程，即可得出结果.

【详解】因为所求直线与直线 $x - 2y + 1 = 0$ 垂直，

所以其斜率为 $k = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$,

又所求直线过点 $(1,0)$,

因此, 所求直线方程为 $y = -2(x-1)$, 即 $2x + y - 2 = 0$.

故选: C.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】

先求出对立事件: 一次都未投中的概率, 然后可得结论.

【详解】由题意小明每次投篮不中的概率是 $1 - 0.6 = 0.4$, 再次投篮都不中的概率是 $0.4^2 = 0.16$,

$\therefore$ 他再次投篮至少投中一次的概率为 $1 - 0.16 = 0.84$.

故选: D.

【点睛】本题考查相互独立事件同时发生的概率公式, 在出现至少、至多等词语时, 可先求其对立事件的概率, 然后由对立事件概率公式得出结论.

5. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据向量在坐标平面上的投影的概念确定.

【详解】向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ 在坐标平面 Oxy 上的投影向量是 $(1, 2, 0)$.

故选: A.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】

计算出原点到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离, 即为所求.

【详解】当 OC 与直线 $x - y - 2 = 0$ 垂直时, 圆 C 的半径最小,

因此, 圆 C 半径的最小值为 $d = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$.

故选: B.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】

设两只老鼠在第 n 天相遇，利用等比数列的求和公式列方程可求得 2^n 的范围，即可得解。

【详解】设两只老鼠在第 n 天相遇，则大老鼠第 n 天打洞的厚度成以 2 为公比的等比数列，

小老鼠第 n 天打洞的厚度成以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

由等比数列的求和公式可得 $\frac{1-2^n}{1-2} + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \geq 10$ ，整理得 $(2^n)^2 - 9 \cdot 2^n - 2 \geq 0$ ，

可得 $2^n \leq \frac{9-\sqrt{89}}{2}$ （舍去）或 $2^n \geq \frac{9+\sqrt{89}}{2} \in (8, 16)$ ，所以，两鼠穿透此墙至少在第 4 天。

故选：B.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】

先根据抛物线方程得出焦点坐标，根据 M 为线段 FN 的中点，求出 M 的横坐标，由抛物线定义，得到 $|FM|$ ，进而可求出结果。

【详解】因为抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $F(2, 0)$ ，

直线 FM 交 y 轴于点 N ， M 为线段 FN 的中点，

所以 M 的横坐标为 $x_M = \frac{0+2}{2} = 1$ ，

又点 M 在抛物线 $y^2 = 8x$ 的上，

所以 $|FM| = x_M + 2 = 3$ ，

因此 $|FN| = 2|FM| = 6$ 。

故选：B.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】

根据椭圆方程得到以 A_1A_2 为直径的圆的半径和圆心坐标, 再由该圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 得到

$$\frac{|2ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = a, \text{ 进而可求出椭圆的离心率.}$$

【详解】因为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$,

因此以 A_1A_2 为直径的圆的半径为 $r = a$, 圆心坐标为 $(0, 0)$,

又该圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切,

所以圆心到直线的距离等于半径, 即 $\frac{|2ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = a$, 则 $a^2 = 3b^2$,

因此 $a^2 = 3a^2 - 3c^2$, 即 $3c^2 = 2a^2$, 所以离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选: D.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】

先由 S_n 求出 a_n , 根据 $\lambda a_n \leq 4 + S_{2n}$ 得到 $\lambda \leq \frac{4 + S_{2n}}{a_n}$, 求出 $\frac{4 + S_{2n}}{a_n}$ 的最小值, 即可得出结果.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^{n+1} - 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) = 2^n$;

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2^2 - 2 = 2$ 满足上式,

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

又 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda a_n \leq 4 + S_{2n}$ 恒成立, 所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \leq \frac{4 + S_{2n}}{a_n}$ 恒成立;

$$\text{令 } b_n = \frac{4 + S_{2n}}{a_n} = \frac{4 + 2^{2n+1} - 2}{2^n} = \frac{2^{2n+1} + 2}{2^n} = 2^{n+1} + \frac{2}{2^n},$$

则 $b_{n+1} - b_n = \left(2^{n+2} + \frac{2}{2^{n+1}}\right) - \left(2^{n+1} + \frac{2}{2^n}\right) = 2^{n+1} - \frac{1}{2^n} > 0$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 显然都成立,

所以 $b_n = 2^{n+1} + \frac{2}{2^n}$ 单调递增,

因此 $(b_n)_{\min} = b_1 = 2^2 + \frac{2}{2} = 5$, 即 $\frac{4+S_{2n}}{a_n}$ 的最小值为 5,

所以 $\lambda \leq 5$, 即实数 λ 的最大值是 5.

故选: C

【点睛】思路点睛:

根据数列不等式恒成立求参数时, 一般需要分离参数, 构造新数列, 根据新数列通项公式, 判断其单调性, 求出最值, 即可求出参数范围 (或最值).

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】 $x \pm y = 0$

【解析】

【分析】

将方程 $x^2 - y^2 = 1$ 改为 $x^2 - y^2 = 0$, 解出来即可

【详解】因为 $x^2 - y^2 = 1$

所以渐近线方程为 $x^2 - y^2 = 0$

即为 $x \pm y = 0$

故答案为: $x \pm y = 0$

【点睛】焦点在 x 轴上的双曲线方程为: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 渐近线方程为: $y = \pm \frac{b}{a}x$

焦点在 y 轴上的双曲线方程为: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, 渐近线方程为: $y = \pm \frac{a}{b}x$

渐近线方程就是将标准方程中右边的 1 变为 0, 然后解出来就是.

12. 【答案】 $x - y - 1 = 0$

【解析】

【分析】

先求出 $M(0,1)$ 关于 x 轴对称的点 M' 的坐标, 反射光线必过 M' 点, 又反射光线经过点 $N(2,1)$, 即可求出直线方程.

【详解】由题意, $M(0,1)$ 关于 x 轴对称的点为 $M'(0,-1)$, 反射光线必过 $M'(0,-1)$ 点,

又反射光线经过点 $N(2,1)$, 故直线的斜率 $k = \frac{-1-1}{0-2} = 1$,

故直线方程为 $y-1=x-2$ ，化成一般式得 $x-y-1=0$ ，

故答案为: $x-y-1=0$

13. 【答案】 2, 8, 32 (答案不唯一)

【解析】

【分析】

根据等差数列的通项公式，写出数列 $\{a_n\}$ 的部分项，根据观察法，即可得出结果.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n-1$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 中的项依次为 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, ……，

显然 $\frac{8}{2} = \frac{32}{8}$ ，

所以 2, 8, 32 能构成等比数列.

故答案为: 2, 8, 32

14. 【答案】 (1). $-\frac{1}{2}$. (2). $\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】

利用空间向量的线性运算把 $\overrightarrow{MN}$ 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 表示即可得 x, y, z ，再由向量的数量积得向量夹角，从而得异面直线所成的角.

【详解】由已知得 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ，又 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ 且 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 不共

面， $\therefore x = y = -\frac{1}{2}$ ， $z = \frac{1}{2}$ ， $\therefore x + y + z = -\frac{1}{2}$ ，

$ABCD$ 是棱长为 1 的正四面体， $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，同理 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}$ ，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}| &= \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\pi}{4},$$

$\therefore$ 异面直线 MN 和 CD 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

【点睛】关键点睛：本题考查空间向量基本定理，考查用向量法求异面直线所成的角．在空间任意不共面的三个向量可作为空间的一个基底，空间所有向量都可用基底表示，且表示方法唯一，因此在用同一个基底用两种不同方法表示出同一向量时，两种表示法中对应的系数相等．由此结合向量的运算法则可表示得结论．同样用向量法求异面直线所成的角，可以直接计算，不需要作图与证明．

15. 【答案】①③④

【解析】

【分析】

由 P_n 的对立事件概率可得 P_3 和 P_3 ，可判断①②，再由第 n 次分正反面，依次讨论前 $n-1$ 的正反及前 $n-2$ 次，从

而得到概率的递推关系，可判断④，由 $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2} + \frac{1}{8}P_{n-3} (n \geq 4)$ 及 $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{8}P_{n-2}$ ，可

得 $P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{16}P_{n-3} < 0, (n \geq 4)$ ，从而可判断③．

【详解】当 $n=3$ 时， $P_3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$ ，①正确；

当 $n=4$ 时，出现连续 3 次正面的情况可能是：正正正反、正正正正、反正正正，

所以 $P_3 = 1 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{13}{16}$ ，②错误；

要求 P_n ，即抛掷 n 次没有出现连续 3 次正面的概率，

分类进行讨论，

若第 n 次反面向上，前 $n-1$ 次未出现连续 3 此正面即可；

若第 n 次正面向上，则需要对第 $n-1$ 进行讨论，依次类推，得到下表：

第 n 次	$n-1$ 次	$n-2$ 次	概率

反面			$\frac{1}{2}P_{n-1}$
正面	反面		$\frac{1}{4}P_{n-2}$
正面	正面	反面	$\frac{1}{8}P_{n-3}$

所以 $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2} + \frac{1}{8}P_{n-3} (n \geq 4)$, ④正确;

由上式可得 $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{8}P_{n-2}$

$$P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n = \left(\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{8}P_{n-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2} + \frac{1}{8}P_{n-3}\right) = \frac{1}{2}P_n - \frac{1}{16}P_{n-3},$$

所以 $P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{16}P_{n-3} < 0, (n \geq 4)$,

又 $P_1 = P_2 = 1, P_3 = \frac{7}{8}, P_4 = \frac{13}{16}$, 满足当 $n \geq 2$ 时, $P_{n+1} < P_n$, ③正确.

故答案为: ①③④.

【点睛】关键点点睛: 本题解题的关键是找到第 n 次和第 $n-1$ 和第 $n-2$ 次的关系, 通过分类讨论及列表格的形式得到 $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2} + \frac{1}{8}P_{n-3} (n \geq 4)$, 属于难题.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) 见详解; (2) 有放回简单随机抽样下, 抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生的概率为 $\frac{12}{25}$; 不放

回简单随机抽样下, 抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生的概率为 $\frac{3}{5}$.

【解析】

【分析】

(1) 用列举法, 分别写出两种抽取方法对应的基本事件, 即可得出结果;

(2) 先列举出两种抽样方式下, “抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生”所包含的基本事件, 确定基本事件个数, 再由古典概型的概率计算公式, 即可求出结果.

【详解】(1) 由题意, 有放回简单随机抽样的样本空间为 $\Omega_1 = \{(B_1, B_1), (B_1, B_2), (B_1, G_1), (B_1, G_2), (B_1, G_3), (B_2, B_1), (B_2, B_2), (B_2, G_1), (B_2, G_2), (B_2, G_3), (G_1, B_1), (G_1, B_2), (G_1, G_1),$

$(G_1, G_2), (G_1, G_3), (G_2, B_1), (G_2, B_2), (G_2, G_1), (G_2, G_2), (G_2, G_3), (G_3, B_1), (G_3, B_2), (G_3, G_1), (G_3, G_2), (G_3, G_3)\}$; 共包含 25 个基本事件;

不放回简单随机抽样的样本空间为: $\Omega_2 = \{(B_1, B_2), (B_1, G_1), (B_1, G_2), (B_1, G_3), (B_2, B_1), (B_2, G_1), (B_2, G_2), (B_2, G_3), (G_1, B_1), (G_1, B_2), (G_1, G_2), (G_1, G_3), (G_2, B_1), (G_2, B_2), (G_2, G_1), (G_2, G_3), (G_3, B_1), (G_3, B_2), (G_3, G_1), (G_3, G_2)\}$; 共包含 20 个基本事件;

(2) 由 (1) 可得, 两种抽样方式下, 抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生, 所包含的基本事件都是:

$(B_1, G_1), (B_1, G_2), (B_1, G_3), (B_2, G_1), (B_2, G_2), (B_2, G_3), (G_1, B_1), (G_1, B_2), (G_2, B_1), (G_2, B_2), (G_3, B_1), (G_3, B_2)$; 共 12 个,

有放回简单随机抽样下, 抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生的概率为 $P_1 = \frac{12}{25}$;

不放回简单随机抽样下, 抽到的 2 人为 1 名男生和 1 名女生的概率为 $P_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

17. 【答案】(1) $a_n = 5 \times (-3)^{n-1}$ 或 $a_n = 5 \times 2^{n-1}$; (2) 15.

【解析】

【分析】

(1) 先设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据等比数列的求和公式, 求出公比, 进而可求出通项公式;

(2) 先设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据题中条件, 求出公差, 得出前 n 项和, 即可得出最大值.

【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $a_1 = 5$, $S_3 = 35$, $q \neq 1$ 所以 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 35$, 即 $q + q^2 - 6 = 0$, 解得 $q = -3$ 或 $q = 2$,

所以 $a_n = 5 \times (-3)^{n-1}$ 或 $a_n = 5 \times 2^{n-1}$;

(2) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $S_5 = S_6 = S_5 + a_6$, 所以 $a_6 = 0$, 因此 $d = \frac{a_6 - a_1}{5} = -1$,

所以 $S_n = 5n + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{11n - n^2}{2}$,

因为 S_n 是开口向下, 对称轴为 $n = \frac{11}{2}$ 的二次函数,

又 $n \in N^*$ ，所以当 $n=5$ 或 6 时， S_n 取得最大值 $S_5 = S_6 = 15$ 。

18. 【答案】 (1) 见解析； (2) $\frac{1}{3}$ ； (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

【解析】

【分析】

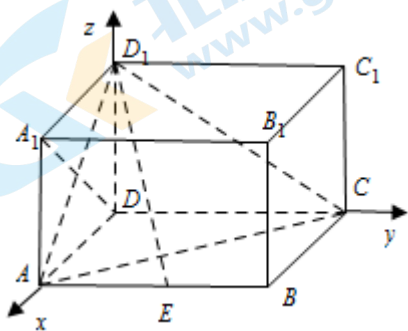
(1) 首先建立空间直角坐标系，证明 $\overrightarrow{D_1E} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0$ ；

(2) 求平面 ACD_1 的法向量，利用点到平面的距离的向量公式代入求解；

(3) 求平面 AD_1E 与平面 ACD_1 的法向量，利用法向量求二面角夹角的余弦值。

【详解】 (1) 如图，以 $\overrightarrow{DA}$ ， $\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{DD_1}$ 为 x, y, z 轴的正方形建立空间直角坐标系，建立空间直角坐标系，

$D_1(0,0,1)$ ， $E(1,1,0)$ ， $A_1(1,0,1)$ ， $D(0,0,0)$



$$\overrightarrow{D_1E} = (1,1,-1), \quad \overrightarrow{A_1D} = (-1,0,-1), \quad \overrightarrow{D_1E} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0,$$

所以 $D_1E \perp A_1D$ ；

(2) $A(1,0,0)$ ， $C(0,2,0)$ ， $D_1(0,0,1)$ ， $E(1,1,0)$ ，

$$\overrightarrow{AC} = (-1,2,0), \quad \overrightarrow{AD_1} = (-1,0,1), \quad \overrightarrow{EA} = (0,1,0)$$

设平面 ACD_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = 1, \text{ 则 } x = 2, z = 2,$$

所以 $\vec{n} = (2,1,2)$ ，

$$\text{则点 } E \text{ 到平面 } ACD_1 \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{EA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{3};$$

(3) 由 (1) 可知 $A_1D \perp D_1E$ ，

又 $\because AD = AA_1$, $\therefore A_1D \perp AD_1$, 且 $AD_1 \cap D_1E = D_1$,

$\therefore A_1D \perp$ 平面 AD_1E , $\overrightarrow{A_1D} = (-1, 0, -1)$ 是平面 AD_1E 的法向量,

$$\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{A_1D} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{2 \times (-1) + 2 \times (-1)}{3 \times \sqrt{1+1}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore$ 平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角是锐角,

所以平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】思路点睛: 本题第二问涉及点到平面的距离, 1. 可以采用等体积转化求解; 2. 利用向量法, 直接代入公式求解; 3. 几何法, 确定点在平面内的射影, 或是利用面面垂直, 点到交线的距离就是点到平面的距离.

19. **【答案】** (1) $a = \frac{1}{2}$; (2) 证明见详解; (3) $a = \pm 1$.

【解析】

【分析】

(1) 根据两直线平行, 可直接得出 a 的值;

(2) 求出直线 l_2 所过定点在圆上, 即可证明结论成立;

(3) 根据题中条件, 由 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 得到 AB 为斜边, 且 $|AB| = 2\sqrt{2}$, 由点到直线距离公式, 求出圆心到直线 l_2 的距离 d , 再由圆的几何法表示出弦长, 列出等量关系求解, 即可得出 a 的值.

【详解】 (1) 因为直线 $l_1: 2x - y + 2 = 0$ 的斜率为 2,

又 $l_1 \parallel l_2$, 直线 $l_2: x - ay - 2 = 0$, 所以 $\frac{1}{a} = 2$, 则 $a = \frac{1}{2}$;

(2) 由 $x - ay - 2 = 0$, 令 $y = 0$ 可得 $x = 2$, 所以直线 l_2 过定点 $(2, 0)$,

因为 $(2, 0)$ 显然满足 $2^2 + 0^2 = 4$, 即点 $(2, 0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上,

所以直线 l_2 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 恒有公共点;

(3) 因为圆 $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 的圆心为 $(a, 1)$, 半径为 $r = 2$,

又直线 l_2 与圆心为 C 的圆 $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, $\triangle ABC$ 为直角三角形, 所以

$|CA| = |CB| = r = 2$, 则 AB 为斜边, 且 $|AB| = 2\sqrt{2}$,

又圆心 $(a, 1)$ 到直线 $x - ay - 2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|a - a - 2|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + a^2}} < r = 2$ 显然恒成立,

根据圆的性质可得： $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ ，

所以 $2\sqrt{2} = 2\sqrt{4 - \frac{4}{1+a^2}}$ ，解得 $a = \pm 1$ 。

【点睛】关键点点睛：

求解本题第三问的关键在于根据圆的性质，以及题中条件，确定 AB 为 $\triangle ABC$ 的斜边，并得到 AB 的长度，再结合点到直线距离公式，以及弦长公式，即可求解。

20. 【答案】 (1) $\frac{1}{3}$ ； (2) F 在平面 PAC 内。证明见解析。

【解析】

【分析】

(1) 计算出 $PA = PD = \sqrt{2}$ ，证明 $AC \perp CD$ ，然后取取 AD 中点 O ，连接 OC, OP ，可证明 $OP \perp$ 平面 $ABCD$ ，这样可建立如图所示的空间直角坐标系，用向量法求线面角的正弦值；

(2) F 在平面 PAC 内。只要证明 $\overrightarrow{AF}$ 与 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}$ 共面即可得。

【详解】直角梯形 $ABCD$ 中，由已知可得 $AC = \sqrt{2}$ ， $CD = \sqrt{2}$ ， $\therefore AC^2 + CD^2 = AB^2$ ，即 $AC \perp CD$ ，

又 $\triangle APD$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形， $\therefore PA = PD = \sqrt{2}$ ，

取 AD 中点 O ，连接 OC, OP ，则 $OC = OA = OD = 1$ ， $OP = 1$ ，

则 $\triangle OAP \cong \triangle OCP \cong \triangle ODP$ ， $\therefore \angle POA = \angle POC = \angle POD$ ，

又 $\angle POA + \angle POD = 180^\circ$ ， $\therefore \angle POA = \angle POC = \angle POD = 90^\circ$ ，

$\therefore OP \perp AD$ ， $OP \perp OC$ ，而 $OC \cap AD = O$ ， $OC, AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore OP \perp$ 平面 $ABCD$ ，

因此可以 AB, AD 为 x, y 轴，过 A 平行于 OP 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ，如图，

则 $A(0,0,0)$ ， $B(1,0,0)$ ， $C(1,1,0)$ ， $D(0,2,0)$ ， $P(0,1,1)$ ，

$\overrightarrow{AP} = (0,1,1)$ ， $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$ ，

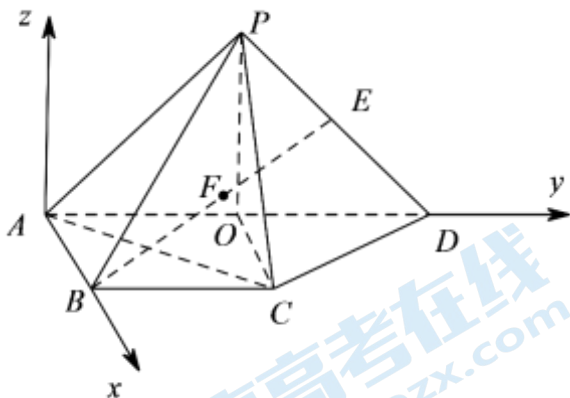
设平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = y + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = x + y = 0 \end{cases}$ ，取 $y = -1$ ，则 $x = z = 1$ ，即 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ ，

又 $\overrightarrow{BP} = (-1, 1, 1)$ ，

$$\cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| |\vec{n}|} = \frac{-1-1+1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3},$$

直线 PB 与平面 PAC 所成角为 θ ，则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle| = \frac{1}{3}$.



(2) 由 (1) $E(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $F(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $\overrightarrow{AF} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$,

设 $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AP}$, 则 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1)$,
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases},$$

$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AP}$, $\therefore \overrightarrow{AF}$ 与 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}$ 共面, $\therefore F$ 在平面 PAC 内.

【点睛】方法点睛：本题考查求线面角，判断点到平面的关系．解题方法是空间向量法，通过求出直线与平面法向量的夹角的余弦值得线面角的正弦值．利用向量法证明向量 $\overrightarrow{AF}$ 与 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}$ 共面从而可得点与平面的位置关系．

21. 【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) $\pm\sqrt{19}$; (3) 证明见详解.

【解析】

【分析】

(1) 记焦距为 $2c$ ，根据题中条件，列出关于 a, b, c 的方程组求解，得出 a, b ，即可得出椭圆方程；

(2) 设 $D(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$ ，联立直线与椭圆方程，由韦达定理，得到 $y_1 + y_2$ 和 $y_1 y_2$ ，由判别式大于零求出 m 范围，根据题中条件，得到 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ ，由此求出 m ，即可得出结果；

(3) 设 $H(x_0, y_0)$ ，由此得到 $P\left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ ，利用 x_0, y_0 分别表示出直线 PQ 和 AH 的方程，联立两直线方程，求出 Q 点横坐标，根据 P 和 Q 两点的坐标得出 M 和 N 的横坐标，进而可求出线段 MN 的长，得出结论成立。

【详解】(1) 记该椭圆的焦距为 $2c$ ，由题意可得
$$\begin{cases} 2c = 2\sqrt{3} \\ 2a = 4b \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases},$$

因此椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 设 $D(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} x - my - 4 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 消去 x ，整理得 $(m^2 + 4)y^2 + 8my + 12 = 0$,

所以 $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{8m}{m^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{12}{m^2 + 4} \end{cases}$, $\Delta = 64m^2 - 48(m^2 + 4) > 0$, 则 $m^2 > 12$;

又以线段 DE 为直径的圆经过原点，所以 $OD \perp OE$ ，则 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

所以 $(my_1 + 4)(my_2 + 4) + y_1 y_2 = 0$ ，即 $(m^2 + 1)y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16 = 0$,

则 $\frac{12(m^2 + 1)}{m^2 + 4} - \frac{32m^2}{m^2 + 4} + 16 = 0$ ，整理得 $m^2 = 19$ 满足 $m^2 > 12$ ，所以 $m = \pm\sqrt{19}$;

(3) 因为 A, B 为椭圆 C 的左、右顶点，所以 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$,

由题意，设 $H(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq \pm 2$)，则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ ，所以 $x_0^2 - 4 = -4y_0^2$,

则 $\frac{x_0 - 2}{y_0} = \frac{-4y_0}{x_0 + 2}$,

因为线段 BH 的垂直平分线分别交直线 BH 和直线 AH 于点 P 和点 Q ,

则 P 为 BH 中点，所以 $P\left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$,

又直线 BH 斜率为 $k_{BH} = \frac{y_0}{x_0 - 2}$ ，所以其垂直平分线 PQ 的斜率为 $k_{PQ} = -\frac{x_0 - 2}{y_0}$,

因此直线 PQ 的方程为 $y - \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0 - 2}{y_0} \left(x - \frac{2 + x_0}{2} \right) = \frac{4y_0}{x_0 + 2} x - \frac{4y_0}{x_0 + 2} \cdot \frac{2 + x_0}{2} = \frac{4y_0}{x_0 + 2} x - 2y_0$,

$$\text{即 } y = \frac{4y_0}{x_0 + 2} x - \frac{3y_0}{2};$$

又直线 AH 的斜率为 $k_{AH} = \frac{y_0}{x_0 + 2}$,

所以直线 AH 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{4y_0}{x_0 + 2} x - \frac{3y_0}{2} \\ y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2) \end{cases} \text{ 可得 } \frac{4y_0}{x_0 + 2} x - \frac{3y_0}{2} = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2), \text{ 则 } \frac{4x}{x_0 + 2} - \frac{3}{2} = \frac{x + 2}{x_0 + 2},$$

$$\text{解得 } x = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{3}, \text{ 即 } x_Q = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{3},$$

又 M 、 N 分别为 PM 、 QN 在 x 轴的垂足,

$$\text{则 } x_M = x_P = \frac{2 + x_0}{2} = 1 + \frac{x_0}{2}, \quad x_N = x_Q = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{3},$$

$$\text{所以 } |MN| = |x_M - x_N| = \frac{2}{3} \text{ 为定值.}$$

【点睛】 关键点点睛:

求解本题第二问的关键在于, 根据线段 DE 为直径的圆经过原点得到 $OD \perp OE$, 联立直线与椭圆方程, 结合韦达定理进行求解;

求解本题第三问的关键在于设出点 H 坐标, 根据点 H 坐标表示出直线方程, 求出 P 和 Q 的坐标, 即可求解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯