通州区 2022-2023 学年第一学期高二年级期末质量检测

数学参考答案及评分标准

2023 年 1 月

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	B	C	A	D	C	C	A	B	D	C

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）2　　（12）$x^2=2y$；$y=-\frac{1}{2}$　　（13）$-\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{OC}$　　（14）$4,2,1,3$；$(4,+\infty)$

（15）①④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为直线 l 的方程为 $x+y+1=0$，

所以直线 l 的斜率为 -1.　　……………………2 分

因为 $l_1 /\!/ l$，

所以直线 l_1 的斜率为 -1.　　……………………4 分

因为直线 l_1 经过点 $A(-1,1)$，

所以直线 l_1 的方程为 $y-1=-(x+1)$，即 $x+y=0$.　　……………………6 分

（Ⅱ）设圆心 C 的坐标为 (a,b).　　……………………7 分

因为圆心为 C 的圆经过 A，B 两点，

所以 $|CA|=|CB|$.　　……………………8 分

所以 $\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$.

所以 $a=0$.　　……………………9 分

因为圆心 C 在直线 l 上，

所以 $a+b+1=0$.　　……………………10 分

所以 $b=-1$.　　……………………11 分

所以圆心 C 的坐标为 $(0,-1)$.

所以圆 C 的半径 $r=|CA|=\sqrt{5}$.　　……………………12 分

所以圆的标准方程为 $x^2+(y+1)^2=5$.　　……………………13 分

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为双曲线的顶点在 x 轴上，

所以设双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$. ……………………1 分

因为两顶点间的距离是 2，

所以$2a=2$. 所以$a=1$. ……………………3 分

因为离心率$e=2$，

所以$\frac{c}{a}=2$.

所以$c=2$. ……………………5 分

所以$b^2=c^2-a^2=3$. ……………………6 分

所以双曲线的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ……………………7 分

（Ⅱ）抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F与该双曲线的一个焦点相同，

所以焦点F的坐标为$(2,0)$. ……………………8 分

所以$\frac{p}{2}=2$. 所以$p=4$. ……………………9 分

设点M的坐标为(x_0,y_0)，

因为点M为抛物线上一点，且$|MF|=3$，

所以$|MF|=2+x_0$. ……………………11 分

所以$3=2+x_0$. 所以$x_0=1$.

所以${y_0}^2=8$.

所以$y_0=2\sqrt{2}$，或$y_0=-2\sqrt{2}$.

所以点M的坐标为$(1,2\sqrt{2})$，或$(1,-2\sqrt{2})$. ……………………13 分

（18）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公比$q=2$，

所以$a_3=a_1q^2=1\times 2^2=4$. ……………………4 分

（Ⅱ）因为$b_n=3n-2+a_n$，

所以$b_n=3n-2+2^{n-1}$. ……………………5 分

所以$b_4=12-2+2^3=18$. ……………………6 分

因为m是a_3和b_4的等差中项，

所以 $2m = a_3 + b_4$. ……………………8 分

所以 $2m = 4 + 18 = 22$.

所以 $m = 11$. ……………………9 分

（III）因为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $b_n = 3n - 2 + 2^{n-1}$，

所以 $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$= 1 + 2^0 + 4 + 2^1 + 7 + 2^2 + \cdots + 3n - 2 + 2^{n-1}$ ……………………10 分

$= (1 + 4 + 7 + \cdots + 3n - 2) + (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$ ……………………12 分

$= \dfrac{n(1+3n-2)}{2} + \dfrac{1-2^n}{1-2}$ ……………………14 分

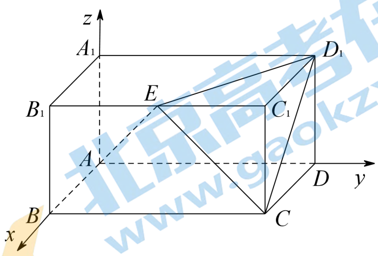
$= \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{1}{2}n + 2^n - 1$. ……………………15 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{1}{2}n + 2^n - 1$.

（19）（本小题 14 分）

解：以 A 为原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………1 分

所以 $A(0,0,0)$，$E(1,1,1)$，$C(1,2,0)$，$D_1(0,2,1)$，$A_1(0,0,1)$. ……………………3 分



（Ⅰ）证明：$\overrightarrow{CE} = (0,-1,1)$，$\overrightarrow{D_1E} = (1,-1,0)$.

……………………4 分

设 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ 为平面 CD_1E 的一个法向量，

所以 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$，$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{D_1E} = 0$. ……………………5 分

所以 $\begin{cases} -y + z = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$ ……………………6 分

取 $y = 1$，则 $x = 1$，$z = 1$.

所以 $\boldsymbol{n} = (1,1,1)$. ……………………7 分

因为 $\overrightarrow{AE} = (1,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{n}$.

所以 $\overrightarrow{AE} // \boldsymbol{n}$.

所以 $AE \perp$ 平面 CD_1E. ……………………9 分

（Ⅱ）因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$ 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的一个法向量. ……………………10 分

设平面 CD_1E 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AA_1}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AA_1}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………14 分

所以平面 CD_1E 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，点 $(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上，

所以 $2c=2\sqrt{3}$，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$. ……………………1 分

所以 $c=\sqrt{3}$，$\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$.

所以 $b^2=1$. ……………………2 分

所以 $a^2=4$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………3 分

（Ⅱ）$\angle ABM$ 与 $\angle OBN$ 相等，理由如下： ……………………4 分

因为直线 l 经过点 $A(-4,0)$，且与椭圆 C 相交于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2)$ 两点，

所以设直线 l 的方程为 $y=k(x+4)$. ……………………5 分

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x+4),\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(1+4k^2)x^2+32k^2x+64k^2-4=0$. ……………………6 分

所以 $\Delta=(32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)>0$. 化简得 $-12k^2+1>0$，解得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

……………………7 分

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-32k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$. ……………………8 分

①若直线 BM 的斜率不存在.

所以 $x_1=-1$，$y_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，或 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，不符合题意. ……………………9 分

同理，直线 BN 的斜率不存在时，也不符合题意.

②若直线 BM 和 BN 的斜率存在，分别设为 k_{BM} 和 k_{BN}.

所以 $k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}=\dfrac{y_1(x_2+1)+y_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\dfrac{(y_1x_2+y_2x_1)+(y_1+y_2)}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}$. ……………………10 分

因为 $x_1+x_2=\dfrac{-32k^2}{1+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$，

所以 $x_1x_2+(x_1+x_2)+1=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}+\dfrac{-32k^2}{1+4k^2}+1=\dfrac{36k^2-3}{1+4k^2}$.

$y_1x_2+y_2x_1=k(x_1+4)x_2+k(x_2+4)x_1=2kx_1x_2+4k(x_1+x_2)$

$=2k\cdot\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}+4k\cdot\dfrac{-32k^2}{1+4k^2}=\dfrac{-8k}{1+4k^2}$.

$y_1+y_2=k(x_1+4)+k(x_2+4)=kx_1x_2+8k=k\cdot\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}+8k=\dfrac{8k}{1+4k^2}$.

所以 $k_{BM}+k_{BN}=0$. ……………………14 分

所以 $k_{BM}=-k_{BN}$.

所以 $\angle ABM=\angle OBN$. ……………………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为等差数列 $\{a_n\}$ 的第 2 项为 4，前 6 项的和为 42，

所以 $a_2=4$，前 6 项的和为 $S_6=42$.

所以 $a_1+d=4$，$6a_1+15d=42$. ……………………2 分

所以 $a_1=2$， $d=2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2n$. ……………………3 分

（Ⅱ）因为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，且 $2T_n=3b_n-a_n$

所以 $2T_n=3b_n-2n$.

所以①当 $n=1$ 时， $2b_1=3b_1-2$.

所以 $b_1=2$. ……………………4 分

②当 $n\geqslant 2$ 时， $2T_{n-1}=3b_{n-1}-2(n-1)$. ……………………5 分

所以 $2T_n-2T_{n-1}=(3b_n-2n)-[3b_{n-1}-2(n-1)]$.

所以 $b_n=3b_{n-1}+2$. ……………………6 分

所以 $b_n+1=3(b_{n-1}+1)$. ……………………7 分

因为 $b_1+1=3$,

所以数列 $\{b_n+1\}$ 是首项为3，公比为3的等比数列. ……………………8 分

所以 $b_n+1=3^n$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=3^n-1$. ……………………9 分

(III) 因为 $c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & n=1,\\ \dfrac{1}{b_n+a_n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$

所以 $c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & n=1,\\ \dfrac{1}{3^n+2n-2}, & n\geqslant 2,\end{cases}$

当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n=\dfrac{1}{3^n+2n-2}<\dfrac{1}{3^n}$. ……………………12 分

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}$

$$=\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{9}(1-3^{n-1})}{1-\frac{1}{3}}$$ ……………………13 分

$$<\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{12}.$$ ……………………15 分

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{5}{12}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。