2024 北京理工大附中高三（下）开学考

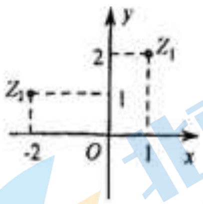
数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$， $A=\{1,3,5\}$， $B=\{1,3\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　）

A. $\{2,4,5,6\}$　　　B. $\{4,6\}$　　　C. $\{2,4,6\}$　　　D. $\{2,5,6\}$

2. 如图，在复平面内，复数 z_1， z_2 对应的点分别为 Z_1， Z_2，则复数 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为（　）



A. $-i$　　　B. -1　　　C. $-3i$　　　D. -3

3. 已知直线 $l_1: y=ax-2$，直线 $l_2: x-ay+2=0$，且 $l_1//l_2$，则 $a=$（　）

A. -1　　　B. 1　　　C. -4　　　D. 4

4. 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF|=4$，则 $\tan\angle MOF=$（　）

A. 5　　　B. 4　　　C. 3　　　D. 2

5. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB=2$， PA 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则点 D 到平面 PBC 的距离为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　B. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　　C. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　　D. $\dfrac{4}{3}$

6. 已知平面向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\vec{b}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，则下列关系正确的是（　）

A. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$　　　B. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{a}$

C. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$　　　D. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

7. 若 $a>b>1$， $0<c<1$，则

A. $a^c<b^c$　　　B. $ab^c<ba^c$　　　C. $a\log_b c<b\log_a c$　　　D. $\log_a c<\log_b c$

8. 已知直线 l_1， l_2 的斜率分别为 k_1， k_2，倾斜角分别为 α_1， α_2，则“$\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right)<0$”是“$k_1k_2<0$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知$\{a_n\}$是公比为$q(q\neq 1)$的等比数列，S_n为其前n项和．若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>\dfrac{a_1}{1-q}$恒成立，则（　）

A. $\{a_n\}$是递增数列　　　　　　　　　　B. $\{a_n\}$是递减数列

C. $\{S_n\}$是递增数列　　　　　　　　　　D. $\{S_n\}$是递减数列

10. 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是线段BC_1上的点，过A_1的平面α与直线PD垂直，当P在线段BC_1上运动时，平面α截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面面积的最小值是（　）

A. 1　　　　B. $\dfrac{5}{4}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　D. $\sqrt{2}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 在$\left(x-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)^5$的展开式中，$x^2$的系数为______.

12. 已知双曲线$x^2+my^2=1$的一条渐近线上一点为$(1,-\sqrt{3})$，则双曲线离心率为______.

13. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=2a_n-a_1$，且a_1,a_2+1,a_3成等差数列，则$a_1=$__________；$a_n=$__________.

14.已知函数$f(x)=x$，$g(x)=ax^2-x$，其中$a>0$. 若$\forall x_1\in[1,2],\exists x_2\in[1,2]$，使得$f(x_1)\ f(x_2)=g(x_1)\ g(x_2)$成立，则$a=$____.

15. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=a(0<a<1)$，$a_{n+1}=a^{a_n}$. 给出下列四个结论：

①$a_2\in(0,a)$；　　　②$a_{10}>a_9$；

③$\{a_{2n}\}$为递增数列；　　　④$\forall n\in\mathbf{N}$，使得$|a_{n+1}-a_n|<1-a$.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在$\triangle ABC$中，$B=\dfrac{2\pi}{3},b=\sqrt{7}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求：

（1）$\sin C$的值；

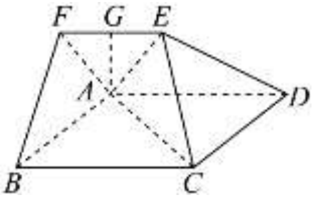
（2）$\triangle ABC$的面积.

条件①：AB边上的高为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；条件②：$\cos A=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$；条件③：$a=1$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 如图，在五面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$是边长为 4 的正方形，$EF//AD$，平面$ADEF\perp$平面

$ABCD$，且 $BC=2EF$，$AE=AF$，点 G 是 EF 的中点.



（1）证明：$AG\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若直线 BF 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$，求 AG 的长；

（3）判断线段 AC 上是否存在一点 M，使 $MG//$ 平面 ABF？若存在，求出 $\frac{AM}{MC}$ 的值；若不存在，说明理由.

18. 2020 年 9 月 22 日，中国政府在第七十五届联合国大会上提出："中国将提高国家自主贡献力度，采取更加有力的政策和措施，二氧化碳排放力争于 2030 年前达到峰值，努力争取 2060 年前实现碳中和."做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废弃物造成的二氧化碳、甲烷等温室气体的排放，助力碳中和. 某校环保社团为了解本校学生是否清楚垃圾分类后的处理方式，随机抽取了 200 名学生进行调查，样本调查结果如下表：假设每位学生是否清楚垃圾分类后的处理方式相互独立.

	高中部		初中部	
	男生	女生	男生	女生
清楚	12	8	24	24
不清楚	28	32	38	34

（1）从该校学生中随机抽取一人，估计该学生清楚垃圾分类后处理方式的概率；

（2）从样本高中部和初中部的学生中各随机抽取一名学生，以 X 表示这 2 人中清楚垃圾分类后处理方式的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（3）从样本中随机抽取一名男生和一名女生，用"$\xi=1$"表示该男生清楚垃圾分类后的处理方式，用"$\xi=0$"表示该男生不清楚垃圾分类后的处理方式，用"$\eta=1$"表示该女生清楚垃圾分类后的处理方式，用"$\eta=0$"表示该女生不清楚垃圾分类后的处理方式. 直接写出方差 $D\xi$ 和 $D\eta$ 的大小关系.（结论不要求证明）

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4m}+\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 与 x 轴交于两点 A_1,A_2，与 y 轴的一个交点为 B，$\triangle BA_1A_2$ 的面积为 2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程及离心率；

（Ⅱ）在 y 轴右侧且平行于 y 轴的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 P_1,P_2，直线 A_1P_1 与直线 A_2P_2 交于点 P.

以原点O为圆心，以A_1B为半径的圆与x轴交于M,N两点（点M在点N的左侧），求$|PM|-|PN|$的值.

20. 已知函数$f(x)=x^2e^{2-x}-x+1$.

（1）求曲线$y=f(x)$在$(2,f(2))$处的切线方程；

（2）设函数$g(x)=f'(x)$，求$g(x)$的单调区间；

（3）判断$f(x)$极值点的个数，并说明理由.

21. 在无穷数列$\{a_n\}$中，a_1,a_2是给定的正整数，$a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）若$a_1=3,a_2=1$，写出a_9,a_{10},a_{100}的值；

（Ⅱ）证明：数列$\{a_n\}$中存在值为0的项；

（Ⅲ）证明：若a_1,a_2互质，则数列$\{a_n\}$中必有无穷多项为1.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【分析】利用集合的交并补运算即可得解.

【详解】因为 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,3\}$，所以 $A\cup B=\{1,3,5\}$，

因为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{2,4,6\}$.

故选：C.

2.【答案】A

【分析】利用复数的几何意义得到复数 z_1，z_2，再利用复数的四则运算即可得解.

【详解】依题意，在复平面内，复数 z_1，z_2 对应的点分别为 Z_1，Z_2，

则 $z_1=1+2i$，$z_2=-2+i$，

所以 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}{(-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}$.

故选：A.

3.【答案】B

【分析】利用两条直线平行，斜率相等，截距不相等即可得解.

【详解】因为直线 $l_1: y=ax-2$，$l_2: x-ay+2=0$，$l_1//l_2$，

所以 $a\neq 0$，则直线 $l_2: x-ay+2=0$ 可化为 $y=\frac{1}{a}x+\frac{2}{a}$，

由 $l_1//l_2$，得 $a=\frac{1}{a}$，解得 $a=1$ 或 $a=-1$，

当 $a=1$ 时，$l_1: y=x-2$，$l_2: y=x+2$，满足题意；

当 $a=-1$ 时，$l_1: y=-x-2$，$l_2: y=-x-2$，两直线重合，不满足题意；

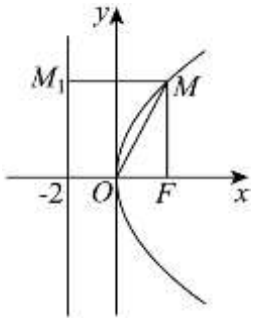
所以 $a=1$.

故选：B。

4.【答案】D

【分析】先由抛物线的焦半径公式求出点 M 横坐标，从而得到 $MF\perp x$ 轴，从而得解.

【详解】因为抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点 $F(2,0)$，准线方程 $x=-2$，如图：



不妨设 $M(x_0,y_0)$，因为点 M 在 C 上，所以 $|MF|=x_0+2=4$，得 $x_0=2$，

又 $F(2,0)$，所以 $MF\perp x$ 轴，$|OF|=2$，

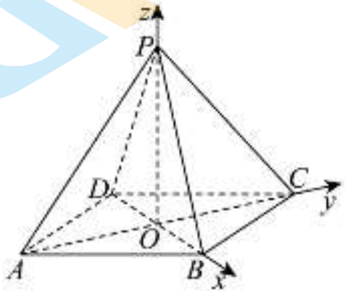
所以 $\tan\angle MOF=\dfrac{|MF|}{|OF|}=\dfrac{4}{2}=2$.

故选：D.

5.【答案】C

【分析】根据题意建立空间直角坐标系，利用空间向量法求点到平面的距离，从而得解.

【详解】依题意，设 $AC\cap BD=O$，则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，



因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle PAO$ 为 PA 与平面 $ABCD$ 所成角，即 $\angle PAO=\dfrac{\pi}{4}$，

因为 $AB=2$，所以 $OA=OC=OB=2\sqrt{2}$，则 $PO=OA=2\sqrt{2}$，

以 O 点为原点，建立空间直角坐标系如图，

则 $C(0,2\sqrt{2},0),B(2\sqrt{2},0,0),D(-2\sqrt{2},0,0),P(0,0,2\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{CD}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0),\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},0,-2\sqrt{2}),\overrightarrow{PC}=(0,2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}z=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=2\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $x=y=1$，故 $\vec{n}=(1,1,1)$，

所以点 D 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}|}{\vec{n}}=\dfrac{|-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}|}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

故选：C.

6.【答案】C

【分析】根据题意，利用向量平行、垂直的坐标表示，依次分析选项是否成立，综合可得答案.

【详解】对于 A，$\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$，

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1+\sqrt{3})^2}{4}\neq 0$，

则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$不成立，则 A 错误；

对于 B，$\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$，

因为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{(-1+\sqrt{3})^2}{4}\neq 0$，则 B 错误；

对于 C，向量$\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，

则有$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$，即$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，C 正确；

对于 D，$\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$，

因为$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\neq\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}$，则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$与$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$平行不成立，D 错误；

故选：C.

7.【答案】C

【详解】试题分析：用特殊值法，令$a=3$，$b=2$，$c=\frac{1}{2}$得$3^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{1}{2}}$，选项 A 错误，$3\times2^{\frac{1}{2}}>2\times3^{\frac{1}{2}}$，选项 B 错误，$\log_3\frac{1}{2}>\log_2\frac{1}{2}$，选项 D 错误，

因为$a\log_b c-b\log_a c=\lg c\cdot(\frac{a}{\lg b}-\frac{b}{\lg a})=\lg c\cdot(\frac{\lg a^a-\lg b^b}{\lg b\lg a}),\because a>b>1\therefore 1<b^b<a^b<a^a$

$\therefore\frac{\lg a^a-\lg b^b}{\lg b\lg a}>0\because 0<c<1\therefore\lg c<0\therefore a\log_b c<b\log_a c$ 选项 C 正确，故选 C.

【考点】指数函数与对数函数的性质

【名师点睛】比较幂或对数值的大小,若幂的底数相同或对数的底数相同,通常利用指数函数或对数函数的单调性进行比较；若底数不同,可考虑利用中间量进行比较.

8.【答案】D

【分析】由题意得 $\alpha_1,\alpha_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，再结合必要不充分条件的定义、斜率与倾斜角的关系，特殊角的三角函数值即可得解.

【详解】由题意两直线均有斜率，所以 $\alpha_1,\alpha_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

当 $\cos(\alpha_1-\alpha_2)<0$ 时，取 $\alpha_1=\frac{2\pi}{3},\alpha_2=0$，则 $\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\cos\frac{2\pi}{3}<0$，

但 $k_1k_2=\tan\frac{2\pi}{3}\tan 0=0$，即充分性不成立；

当 $k_1k_2<0$ 时，取 $\alpha_1=\frac{2\pi}{3},\alpha_2=\frac{\pi}{3}$，则 $k_1k_2=\tan\frac{2\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}=-3<0$，

但 $\cos(\alpha_1-\alpha_2)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}>0$，即必要性不成立；

综上，“$\cos(\alpha_1-\alpha_2)>0$”是“$k_1k_2>0$”的既不充分也不必要条件.

故选：D.

9. 【答案】A

【分析】先根据等比数列前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，结合 $S_n>\frac{a_1}{1-q}$ 恒成立，分析 a,q 的取值范围，得到 $\{a_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 的单调性，从而得解.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q\neq1)$ 的等比数列，S_n 为其前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

由 $S_n>\frac{a_1}{1-q}$ 恒成立，得 $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>\frac{a_1}{1-q}$，即 $\frac{a_1}{1-q}\times q^n<0$ 恒成立，

若 $q<0$，则 q^n 可能为正也可能为负，不等式不恒成立；

若 $q=0$，则 $\frac{a_1}{1-q}\times q^n=0$，显然不等式不成立；

所以 $q>0$，则 $q^n>0$，$\frac{a_1}{1-q}<0$，显然 $a_1\neq0$，

当 $a_1>0$ 时，$q>1$，此时 $\{a_n\}$ 是递增数列，$\{S_n\}$ 是递增数列；

当 $a_1<0$ 时，$0<q<1$，此时 $\{a_n\}$ 是递增数列，$\{S_n\}$ 是递减数列；

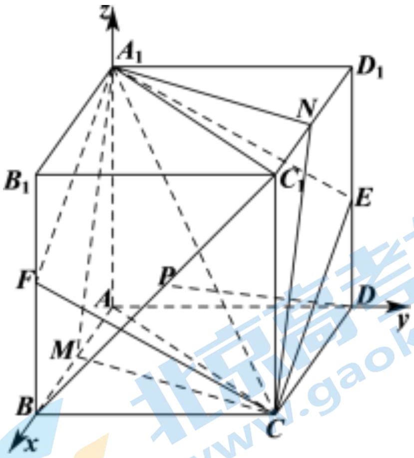
综上，$\{a_n\}$ 是递增数列，$\{S_n\}$ 的单调性不确定.

故选：A.

10. 【答案】C

【分析】以点A为坐标原点，AB、AD、AA_1所在直线分别为x、y、z轴建立所示的空间直角坐标系，设点$P(1,t,t)(0\le t\le 1)$，分$t=0$、$t=1$、$0<t<1$三种情况讨论，确定截面α与各棱的交点，求出截面面积关于t的表达式，由此可解得截面面积的最小值.

【详解】以点A为坐标原点，AB、AD、AA_1所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$、$A_1(0,0,1)$、$B(1,0,0)$、$B_1(1,0,1)$、$C(1,1,0)$、$C_1(1,1,1)$、$D(0,1,0)$、$D_1(0,1,1)$，

设点$P(1,t,t)$，其中$0\le t\le 1$.

①当$t=0$时，点P与点B重合，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，

所以，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，则$BD\perp AC$，$BD\perp AA_1$，

$\because AC\cap AA_1=A$，$\therefore BD\perp$平面AA_1C_1C，此时平面α即为平面AA_1C_1C，

截面面积为$S=AA_1\cdot AC=\sqrt{2}$；

②当$t=1$时，同①可知截面面积为$S=\sqrt{2}$；

③当$0<t<1$时，$\overrightarrow{DP}=(1,t-1,t)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，

$\because \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1+t-1-t=0$，$\therefore A_1C\perp PD$，则$A_1C\subset\alpha$，

设平面α交棱DD_1于点$E(0,1,z)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,0,z)$，

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CE}=-1+tz=0$，可得$z=\dfrac{1}{t}>1$，不合乎题意.

设平面α交棱AB于点$M(x,0,0)$，$\overrightarrow{CM}=(x-1,-1,0)$，

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CM}=x-1-(t-1)=0$，可得$x=t$，合乎题意，即$M(t,0,0)$，

同理可知，平面α交棱C_1D_1于点$N(1-t,1,1)$，

$\overrightarrow{A_1N}=(1-t,1,0)=\overrightarrow{MC}$，且$A_1N$与$MC$不重合，故四边形$A_1MCN$为平行四边形，

$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1N}=(1-t,1,0)$，$\cos\angle CA_1N=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{A_1N}}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1N}\right|}=\dfrac{2-t}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2-2t+2}}$，

则 $\sin\angle CA_1N=\sqrt{1-\cos^2\angle CA_1N}=\dfrac{\sqrt{2(t^2-t+1)}}{\sqrt{3(t^2-2t+2)}}$，

所以，截面面积为

$$S=2S_{\triangle CA_1N}=\left|\overrightarrow{A_1C}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1N}\right|\sin\angle CA_1N=\sqrt{2(t^2-t+1)}=\sqrt{2\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}=\frac{\sqrt{6}}{2}<\sqrt{2}.$$

综上所述，截面面积的最小值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题考查正方体截面面积最值的求解，解题的关键在于确定截面与各棱交点的位置，这里可以利用空间向量法，将线线垂直关系转化为向量数量积为零来处理，确定点的位置，进而将截面面积的最值利用函数的最值来求解.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】10

【分析】利用二项式定理写出通项公式，令 $r=4$ 即可求 x^2 的系数.

【详解】因为 $\left(x-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)^5$，则 $x>0$，故 $\left(x-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)^5=\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$，

而 $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r x^{5-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^r\mathrm{C}_5^r x^{5-\frac{3}{2}r}\ (0\le r\le 5, r\in\mathrm{N})$，

令 $5-\dfrac{3}{2}r=2$，得 $r=2$，

则所求 x^2 的系数为 $(-1)^2\mathrm{C}_5^2=10$.

故答案为：10.

12. 【答案】2

【分析】由双曲线方程可得其渐近线方程,从而得关于 m 的方程,再结合离心率公式求解即可.

【详解】因为双曲线 $x^2+my^2=1$ 可化为 $x^2-\dfrac{y^2}{-\frac{1}{m}}=1$，且 $m<0$，

所以其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{m}}x$，

因为 $(1,-\sqrt{3})$ 在其中一条渐近线上，所以 $-\sqrt{3}=-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}$，则 $-\dfrac{1}{m}=3$，

所以该双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，则 $a=1,c^2=1+3=4$，故 $c=2$，

所以该双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=2$.

故答案为：2.

13.【答案】 ①. 2 ②. 2^n

【分析】根据题意，得到 $a_n=2a_{n-1}(n\geq 2)$，得到 $\{a_n\}$ 为等比数列，列出方程组，求得 $a_1=2$，再由等比数列的通项公式，即可求解.

【详解】由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_1$，

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-a_1$，两式相减可得 $a_n=2a_{n-1}(n\geq 2)$，

又由 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列，所以 $a_1+a_3=2(a_2+1)$，即 $a_1+4a_1=2\cdot(2a_1+1)$，

解得 $a_1=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

故答案为：2；2^n.

14.【答案】$\frac{3}{2}$

【分析】根据题意可得 $a-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1}$，分别求两边的范围，利用子集关系，得到结果.

【详解】解：依题意，得：$x_1x_2=\left(ax_1{}^2-x_1\right)\left(ax_2{}^2-x_2\right)$，化简，得：$a^2x_1{}^2x_2{}^2-ax_1{}^2x_2-ax_1x_2{}^2=0$，

因为 $a>0$. $x_1,x_2\in[1,2]$，所以，$ax_1x_2-x_1-x_2=0$，即 $a=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，

所以，$a-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1}$，因为 $\frac{1}{x_1}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，且 $a-\frac{1}{x_2}\in\left[a-1,a-\frac{1}{2}\right]$，

因为 $\forall x_1\in[1,2],\exists x_2\in[1,2]$，有 $a-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1}$ 成立，

所以，$\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq\left[a-1,a-\frac{1}{2}\right]$，

所以，$\begin{cases}\frac{1}{2}\geq a-1\\ 1\leq a-\frac{1}{2}\end{cases}$

所以，$\frac{3}{2}\leq a\leq\frac{3}{2}$，所以，$a=\frac{3}{2}$.

故答案为$\frac{3}{2}$

【点睛】本题考查了函数的单调性与值域，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

15.【答案】②④

【分析】利用指数函数的单调性可判定①②③，根据条件递推得$a^{a_n}\in(a,1)$，结合不等式性质可判定④.

【详解】对于①，根据题意可知$a_2=a^{a_1}=a^a$，

因为$0<a<1$，所以$a^1<a^a<a^0$，即$a_2\in(a,1)$，故①错误；

对于③，则$a_1<a_2<1$，故$a^{a_1}>a^{a_2}>a^1$，即$1>a_2>a_3>a_1=a>0$，

所以$a^{a_2}<a^{a_3}<a^{a_1}$，即$a_3<a_4<a_2$，故③错误；

对于②，依次递推有$0<a<a_3<a_4<a_2<1$，

所以$a^{a_3}>a^{a_4}>a^{a_2}$，即$a_4>a_5>a_3$，

所以$a^{a_4}<a^{a_5}<a^{a_3}$，即$a_5<a_6<a_4$，

所以$a^{a_5}>a^{a_6}>a^{a_4}$，即$a_6>a_7>a_5$，

所以$a^{a_6}<a^{a_7}<a^{a_5}$，即$a_7<a_8<a_6$，

所以$a^{a_7}>a^{a_8}>a^{a_6}$，即$a_8>a_9>a_7$，

所以$a^{a_8}<a^{a_9}<a^{a_7}$，即$a_9<a_{10}<a_8$，故②正确；

对于④，因为$0<a<1$，所以$a^a=a_2\in(a,1)$，则$a^{a_2}\in(a,1)$，依次可知$a^{a_n}\in(a,1)$，

所以$\begin{cases}a<a_{n+1}<1\\a\le a_n<1\end{cases}\Rightarrow a-1<a_{n+1}-a_n<1-a\Rightarrow|a_{n+1}-a_n|<1-a$，故④正确.

故答案为：②④.

【点睛】难点点睛：本题的难点是利用指数函数的单调性，逐一分析列举得出$a_9<a_{10}<a_8$，从而可判定②.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【答案】（1）$\frac{\sqrt{21}}{7}$；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】选①：（1）在直角$\triangle ACD$中，$\sin A=\frac{\sqrt{21}}{14}$，再利用$\sin C=\sin(A+B)$即可求得结果；

（2）在直角$\triangle BDC$中，由$\sin B=\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得$BC=a=1$，再利用面积公式即可得解.

选②：（1）直接利用$\sin C=\sin(A+B)$即可求得结果；

（2）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，求得$a=1$，再利用面积公式即可得解；

选③：（1）由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，再利用 $\sin C=\sin(A+B)$ 即可得结果；

（2）直接利用三角形面积公式得解.

【详解】选①：AB 边上的高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（1）设 AB 边上高为 CD，在直角 $\triangle ACD$ 中，$\sin A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

$\because B=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore 0<A<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

$\because A+B+C=\pi$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}\times(-\dfrac{1}{2})+\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（2）在直角 $\triangle BDC$ 中，因为 $\sin B=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{BC}=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore BC=a=1$

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

选②：$\cos A=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

（1）$\because B=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore 0<A<\dfrac{\pi}{3}$，

又$\because \cos A=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

$\because A+B+C=\pi$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}\times(-\dfrac{1}{2})+\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（2）$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\therefore a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

选③：$a=1$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\therefore \sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

又$\because 0<A<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \cos A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

$\because A+B+C=\pi$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}\times(-\frac{1}{2})+\frac{5\sqrt{7}}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】方法点睛：在解三角形题目中，若已知条件同时含有边和角，但不能直接使用正弦定理或余弦定理得到答案，要选择“边化角”或“角化边”，变换原则常用：

（1）若式子含有$\sin x$的齐次式，优先考虑正弦定理，“角化边”；

（2）若式子含有a,b,c的齐次式，优先考虑正弦定理，“边化角”；

（3）若式子含有$\cos x$的齐次式，优先考虑余弦定理，“角化边”；

（4）代数变形或者三角恒等变换前置；

（5）含有面积公式的问题，要考虑结合余弦定理使用；

（6）同时出现两个自由角（或三个自由角）时，要用到$A+B+C=\pi$.

17.【答案】（1）证明见解析

（2）$AG=1$或$AG=\frac{\sqrt{34}}{2}$

（3）存在；$\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$

【分析】（1）由面面垂直性质定理，可得线面垂直；

（2）建立空间直角坐标系，求出平面ACE的一个法向量，利用线面角的向量求法即得；

（3）利用空间向量确定M坐标，从而得出其位置.

【小问1详解】

因为$AE=AF$，点G是EF的中点，所以$AG\perp EF$，

又因为$EF//AD$，所以$AG\perp AD$，

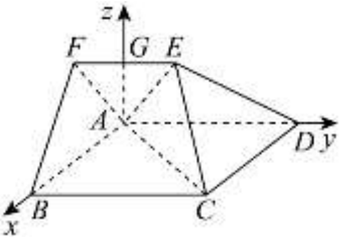
因为平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$，$AG\subset$平面$ADEF$，

所以$AG\perp$平面$ABCD$；

【小问2详解】

因为$AG\perp$平面$ABCD$，$AB\perp AD$，所以AG,AD,AB两两垂直.

以A为原点，以AB，AD，AG分别为x轴、y轴和z轴，如图建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$， $B(4,0,0)$， $C(4,4,0)$，

设 $AG=t\ (t>0)$，则 $E(0,1,t)$， $F(0,-1,t)$，

所以 $\overrightarrow{BF}=(-4,-1,t)$， $\overrightarrow{AC}=(4,4,0)$， $\overrightarrow{AE}=(0,1,t)$，

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}4x+4y=0\\ y+tz=0\end{cases}$，令 $z=1$，得 $\vec{n}=(t,-t,1)$，

因为 BF 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$，

所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BF},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}\right|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，

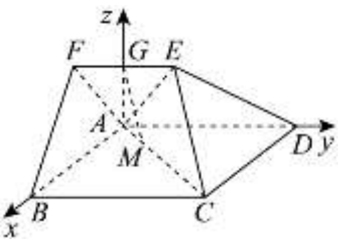
即 $\frac{|2t|}{\sqrt{17+t^2}\cdot\sqrt{2t^2+1}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，解得 $t^2=1$ 或 $t^2=\frac{17}{2}$，

所以 $AG=1$ 或 $AG=\frac{\sqrt{34}}{2}$；

【小问 3 详解】

假设线段 AC 上存在一点 M，使得 MG // 平面 ABF，

设 $\frac{AM}{AC}=\lambda$，则 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$，



由 $\overrightarrow{AC}=(4,4,0)$，得 $\overrightarrow{AM}=(4\lambda,4\lambda,0)$，设 $AG=t\ (t>0)$，则 $\overrightarrow{AG}=(0,0,t)$，

所以 $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=(-4\lambda,-4\lambda,t)$，

设平面 ABF 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

因为 $\overrightarrow{AB}=(4,0,0)$， $\overrightarrow{AF}=(0,-1,t)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{AF}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-y_1+tz_1=0\\ 4x_1=0\end{cases}$，令$z_1=1$,得$\vec{m}=(0,t,1)$，

因为$MG//$平面ABF，

所以$\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m}=0$，即$-4\lambda t+t=0$，解得$\lambda=\frac{1}{4}$.

所以$\frac{AM}{AC}=\frac{1}{4}$，此时$\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$，

所以当$\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$时，$MG//$平面$ABF$.

18.【答案】（1）$\frac{17}{50}$

（2）分布列见解析，X 的数学期望为$\frac{13}{20}$；

（3）$D\xi>D\eta$.

【分析】（1）运用古典概率公式即可；

（2）X 的取值有 0，1，2，分别求得随机变量取每一个值的概率得出分布列，由公式求得其数学期望；

（3）由表中数据可得结论.

【小问 1 详解】

解：由已知得，清楚垃圾分类后处理方式的有$12+8+24+24=68$人，

所以从该校学生中随机抽取一人，该学生清楚垃圾分类后处理方式的概率为$\frac{68}{200}=\frac{17}{50}$；

【小问 2 详解】

解：高中部共有$12+8+28+32=80$名学生，其中清楚垃圾分类后处理方式的学生有$12+8=20$人，不清楚垃圾分类后处理方式的学生有$28+32=60$人，

初中部共有$24+24+38+34=120$名学生，其中清楚垃圾分类后处理方式的学生有$24+24=48$人，不清楚垃圾分类后处理方式的学生有$38+34=72$人，

从样本高中部和初中部的学生中各随机抽取一名学生，以X表示这 2 人中清楚垃圾分类后处理方式的人数，则X的取值有 0，1，2，所以

$P(X=0)=\frac{60}{80}\times\frac{72}{120}=\frac{9}{20}$，$P(X=1)=\frac{20}{80}\times\frac{72}{120}+\frac{60}{80}\times\frac{48}{120}=\frac{9}{20}$，$P(X=2)=\frac{20}{80}\times\frac{48}{120}=\frac{1}{10}$，

所以X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{10}$

所以 X 的数学期望为 $EX=0\times\frac{9}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$；

【小问 3 详解】

解：$D\xi>D\eta$.

19.【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$；（Ⅱ）4.

【分析】(Ⅰ)由题意结合三角形的面积求得 m 的值即可确定椭圆方程，然后求解离心率即可；

(Ⅱ)由题意首先求得点 P 的轨迹方程，然后结合双曲线的定义和几何性质可得 $|PM|-|PN|$ 的值.

【详解】（Ⅰ）因为 $m>0$, 由椭圆方程知：$a^2=4m,b^2=m,a=2\sqrt{m},b=\sqrt{m}$，

$S_{\Delta BA_1A_2}=\frac{1}{2}\times 2ab=2\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}=2m=2$，所以 $m=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

由 $a=2,b=1$，$a^2=b^2+c^2$，得 $c=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）设点 $P(x_P,y_P)$，$P_1(x_0,y_0),P_2(x_0,-y_0)(x_0>0)$, 不妨设 $A_1(-2,0),A_2(2,0)$,

设 $P_1A_1:y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，$P_2A_2:y=\frac{-y_0}{x_0-2}(x-2)$，

由 $\begin{cases} y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2), \\ y=\frac{-y_0}{x_0-2}(x-2) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_P=\frac{4}{x_0}, \\ y_P=\frac{2y_0}{x_0}. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_0=\frac{4}{x_P}, \\ y_0=\frac{x_0y_P}{2}=\frac{\frac{4}{x_P}y_P}{2}=\frac{2y_P}{x_P}. \end{cases}$

又 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，得 $\frac{(\frac{4}{x_P})^2}{4}+\frac{4y_P^{\ 2}}{x_P^{\ 2}}=1$，

化简得 $\frac{x_P^{\ 2}}{4}-y_P^{\ 2}=1(x_P>0)$.

因为 $A_1(-2,0), B(0,1)$，所以 $|A_1B|=\sqrt{5}$，即 $M(-\sqrt{5},0), N(\sqrt{5},0)$.

所以点 P 的轨迹为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支，M, N 两点恰为其焦点，A_1, A_2 为双曲线的顶点，且 $|A_1A_2|=4$，所以 $|PM|-|PN|=4$.

【点睛】本题主要考查椭圆方程的求解，平面轨迹方程的确定，双曲线的性质与应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

20. 【答案】（1） $x+y-5=0$　21. 答案见解析

（2） 2；理由见解析

【分析】（1）求出 $f'(x)$ 导数，然后求出 $f'(2)$，从而求解.

（2）由（1）知 $g(x)=f'(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1$，然后求出导数 $g'(x)$，从而可求解.

（3）根据（2）中分类讨论 $g(x)$ 的情况，然后求出相应 $g(x)=0$ 的解，从而求出 $f(x)$ 单调区间，从而求解.

【小问 1 详解】

由题意知 $f(x)=x^2e^{2-x}-x+1$，定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1$，

所以直线的斜率 $k=f'(2)=-1$，$f(2)=3$，

所以切线方程为 $y=-x+5$，即 $x+y-5=0$.

【小问 2 详解】

由（1）知 $g(x)=f'(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1$，所以 $g'(x)=(x^2-4x+2)e^{2-x}$，

令 $g'(x)=0$，即 $x^2-4x+2=0$，解得 $x=2-\sqrt{2}$ 或 $x=2+\sqrt{2}$，

当 $x\in(-\infty,2-\sqrt{2})$，$g'(x)>0$，

当 $x\in(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，$g'(x)<0$，

当 $x\in(2+\sqrt{2},+\infty)$，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,2-\sqrt{2})$，$(2+\sqrt{2},+\infty)$ 单调递增，在 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 单调递减.

【小问 3 详解】

2 个极值点，理由如下：

由（2）知当 $x<2-\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,2-\sqrt{2})$ 上单调递增，

$g(2-\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}-1>\frac{1}{2}e-1>0$，$g(0)=-1<0$，

所以存在唯一 $x_1\in(0,2-\sqrt{2})$，使 $g(x_1)=0$；

当 $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 上单调递减，

$g(2-\sqrt{2})>0$，$g(2+\sqrt{2})<g(2)=-1<0$，

所以存在唯一 $x_2\in(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，使 $g(x_2)=0$；

当 $x>2+\sqrt{2}$ 时，$(-x^2+2x)<0$，$e^{2-x}>0$，所以 $g(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1<0$

所以 $g(x)$ 在区间 $(2+\sqrt{2},+\infty)$ 无零点；

综上，当 $x\in(-\infty,x_1)$，$g(x)=f'(x)<0$，

当 $x\in(x_1,x_2)$，$g(x)=f'(x)>0$，

当 $x\in(x_2,+\infty)$，$g(x)=f'(x)<0$，

所以当 $x=x_1$ 时，$f(x)$ 取到极小值；当 $x=x_2$ 时，$f(x)$ 取到极大值；

故 $f(x)$ 有 2 个极值点.

21.【答案】(Ⅰ) $a_9=0,a_{10}=1,a_{100}=1$；(Ⅱ) 详见解析；(Ⅲ) 详见解析.

【分析】(I) 根据 $a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$ 以及 a_1,a_2 的值，由此求得 $a_3,a_4\cdots,a_{10}$ 的值，找出规律，求得 a_{100} 的值.（II）利用反证法，先假设 $a_n\neq 0$，利用递推关系找出规律，推出矛盾，由此证明原命题成立.（III）首先利用反证法证明数列 $\{a_n\}$ 中必有"1"项，其次证明数列 $\{a_n\}$ 中必有无穷多项为"1"，由此证得原命题成立.

【详解】解：(I)由 $a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，以及 $a_1=3,a_2=1$，可知，$a_3=2$，$a_4=1,a_5=1,a_6=0,a_7=1,a_8=1,a_9=0,a_{10}=1$，从 a_4 开始，规律为两个 1 和一个 0，周期为 3，重复出现，故 $a_9=0,a_{10}=1,a_{100}=a_4=1$.

(II)反证法：假设 $\forall i$，$a_i\neq 0$. 由于 $a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$?¼? $a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，

记 $M=\max\{a_1,a_2\}$.则 $a_1\le M,a_2\le M$.

则 $0<a_3=|a_2-a_1|\le M-1$，$0<a_4=|a_3-a_2|\le M-1$，

$0<a_5=|a_4-a_3|\le M-2$，$0<a_6=|a_5-a_4|\le M-2$，$\cdots$，

依次递推，有 $0<a_7=|a_6-a_5|\le M-3$，$0<a_8=|a_7-a_6|\le M-3\ldots$，

则 $a_{2k+1}\le M-k,k\in N^*$.

当 $k>M$ 时，$a_{2k+1}<0$，与 $a_{2k+1}>0$ 矛盾.

故存在 i，使 $a_i=0$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现值为 0 的项.

(III)首先证明：数列$\{a_n\}$中必有“1”项．用反证法，

假设数列$\{a_n\}$中没有“1”项，由(II)知，数列$\{a_n\}$中必有“0”项，设第一个“0”项是a_m $(m\ge 3)$，令$a_{m-1}=p$，$p>1, p\in N^*$，则必有$a_{m-2}=p$，

于是，由$p=a_{m-1}=|a_{m-2}-a_{m-3}|=|p-a_{m-3}|$，则$a_{m-3}=2p$，因此$p$是$a_{m-3}$的因数，

由$p=a_{m-2}=|a_{m-3}-a_{m-4}|=|2p-a_{m-4}|$，则$a_{m-4}=p$或$3p$，因此$p$是$a_{m-4}$的因数.

依次递推，可得p是a_1,a_2的因数，因为$p>1$，所以这与a_1,a_2互质矛盾．所以，数列$\{a_n\}$中必有“1”项.

其次证明数列$\{a_n\}$中必有无穷多项为“1”.

假设数列$\{a_n\}$中的第一个“1”项是a_k，令$a_{k-1}=q$，$q>1, q\in N^*$，

则$a_{k+1}=|a_k-a_{k-1}|=q-1$，

若$a_{k+1}=q-1=1$，则数列中的项从a_k开始，依次为“1，1，0”的无限循环，

故有无穷多项为1；

若$a_{k+1}=q-1>1$，则$a_{k+2}=|a_{k+1}-a_k|=q-2, a_{k+3}=|a_{k+2}-a_{k+1}|=1$，

若$a_{k+2}=q-2=1$，则进入“1，1，0”的无限循环，有无穷多项为1；

若$a_{k+2}=q-2>1$，则从a_k开始的项依次为$1, q-1, q-2, 1, q-3, q-4, 1$，

必出现连续两个“1”项，从而进入“1，1，0”的无限循环，故必有无穷多项为1.

【点睛】本小题主要考查递推数列，考查合情推理，考查与数列有关的证明，考查分析问题与解决问题的能力，综合性很强，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！