中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 11 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	B	A	B	D	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对但不全的得 2 分，有错选的得 0 分．

9	10	11	12
BD	AC	AB	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．1　　　　14．$\frac{7}{2}$

15．$\sqrt{10}+\sqrt{2}$　　　　16．35

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）$\because \frac{2c\sin B}{b}=\frac{\sin C}{\cos B}$，所以由正弦定理得 $\frac{2\sin C\sin B}{\sin B}=\frac{\sin C}{\cos B}$

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，得 $B=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………3 分

$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}}=-5\sqrt{3}$ ……………5 分

（2）$\because \Delta ABC$ 内切圆的面积为 π，所以内切圆半径 $r=1$，

由圆的切线性质得 $c+a-b=2\sqrt{3}$，$\therefore b=c+a-2\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ ……………………7 分

由余弦定理得 $b^2=c^2+a^2-ac$，

$\therefore (3+\sqrt{3})^2=c^2+a^2-ac=(a+c)^2-3ac$，将 $a+c=3+3\sqrt{3}$ 代入，

$\therefore ac=8+4\sqrt{3},\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}+3$ ……………………………………10 分

（或$\therefore a+b+c=6+4\sqrt{3},\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot(a+b+c)=2\sqrt{3}+3$ ……………………10 分）

18.（12 分）

（1）过 D 作 AB 的垂线交 AB 于 H 点，设 $AC=AB=a$，

则 $BC=\sqrt{2}a,BD=2a,HD=HB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}a,AH=BH-BA=\left(\sqrt{2}-1\right)a$，

$AD=\sqrt{AH^2+DH^2}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}a$，

由题意得，二面角 $C-SA-D$ 的平面角为 $\angle CAD$， ……………………………2 分

$\therefore\cos\angle CAD=\dfrac{DH}{DA}=\sqrt{\dfrac{2}{5-2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{34\left(5+2\sqrt{2}\right)}}{17}$ ……………………………4 分

（2）分别以 AB，AC，AS 为 x 轴，y 轴，z 轴建立直角坐标系，$\therefore A(0,0,0),B(a,0,0)$，

$C(0,a,0),S(0,0,h)$，则 $E(\lambda a,0,(1-\lambda)h),F(0,\lambda a,(1-\lambda)h)$，

$\because SB=SC$ 且 $\dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SF}{SC}=\lambda,\therefore SE=SF$ ……………………………6 分

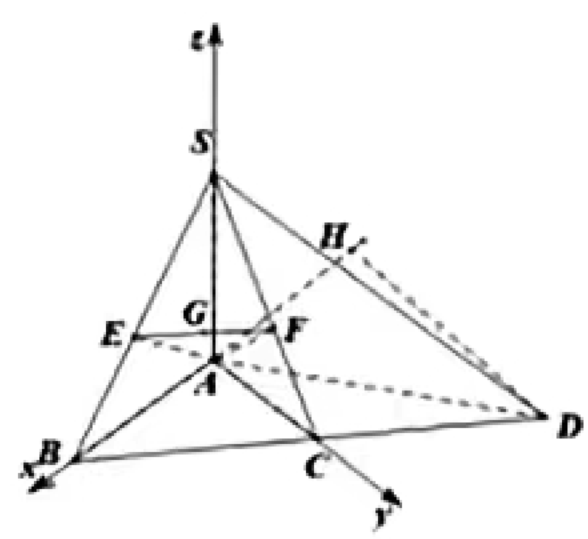
又$\because \Delta SAB\cong\Delta SAC,\therefore\angle BSA=\angle CSA$，那么 $\Delta SAE\cong\Delta SAF$，

则 $AE=AF$ ……………………………………………………………8 分

故 ΔSEF 与 ΔAEF 都是等腰三角形，取 EF 的中点 G，则 SG 与 AG 均垂直于 EF，

$G\left(\dfrac{1}{2}\lambda a,\dfrac{1}{2}\lambda a,(1-\lambda)h\right),\overrightarrow{SG}=\left(\dfrac{1}{2}\lambda a,\dfrac{1}{2}\lambda a,-\lambda h\right),\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{1}{2}\lambda a,\dfrac{1}{2}\lambda a,(1-\lambda)h\right)$，

平面 $AEF\perp$ 平面 SBC 等价于 $\overrightarrow{SG}\perp\overrightarrow{AG}$ ……………10 分



$\therefore\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{AG}=\dfrac{a^2\lambda^2}{4}+\dfrac{a^2\lambda^2}{4}-\lambda h(1-h)h=0$，

又$\because\angle SCB=60^\circ,\therefore a=h,\therefore\lambda=\dfrac{2}{3}$ ……………………12 分

19.（12 分）

（1）$\because 2a_{n+1}=a_n+2,\therefore 2(a_{n+1}-2)=a_n-2$，即 $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$，

$\therefore \{a_n-2\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 ……………………………………………………2 分

$a_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$\therefore a_n=2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……………………………………………4 分

（2）$\because S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=2n+3\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=2n+6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

……………………………………………………………………………………………………6 分

$\therefore S_n-2n-6=-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\left|S_n-2n-6\right|=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{2023}$，

即 $2^{n-1}>6069$，$\therefore n$ 取最小值 14 ……………………………………………………8 分

（3）$\because C_n=n\lambda\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，$\frac{C_{n+1}}{C_n}=\frac{2(n+1)}{3n}<1$，得 $n>2$，

即 $C_{n+1}<C_n$，有 $C_3>C_4>C_5\cdots$，又 $C_1=\lambda, C_2=C_3=\frac{4}{3}\lambda$，

故 $\{C_n\}$ 中最大项为 C_2, C_3 ……………………………………………………10 分

又 $\{b_m\}$ 中最小值为 λ^2，$\therefore (b_m)_{\min}-(C_n)_{\max}>\frac{7}{3}$，即 $\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda>\frac{7}{3}$

$\therefore (3\lambda-7)\cdot(\lambda+1)>0$，又 $\lambda>0$，$\therefore \lambda>\frac{7}{3}$ ……………………………………12 分

20.（12 分）

（1）由题意可知：X 的所有可能取值为 2.3，0.8，0.5，

$P(X=2.3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=0.3$ ……………………………………………………1 分

$X=0.8$ 包含的可能为“高低高”“低高高”“低低高”，

$P(X=0.8)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=0.5$ ……………………………2 分

$P(X=0.5)=1-0.3-0.5=0.2$ ……………………………………………………3 分

X 的分布列为：

X	2.3	0.8	0.5
P	0.3	0.5	0.2

……………………………………………………………………………………………4 分

数学期望 $E(X)=1.19$ ……………………………………………………5 分

（2）设升级后一件产品的利润为 Y，

Y 的所有可能取值为 $2.3-a, 0.8-a, 0.5-a$ ……………………………6 分

$P(Y=2.3-a)=\left(\frac{1}{2}+b\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6b+3}{10}$ ……………………………7 分

$P(Y=0.8-a)=\left(\frac{1}{2}-b\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{2}+b\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{2}-b\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5-6b}{10}$ ……8 分

$P(Y=0.5-a)=1-\frac{6b+3}{10}-\frac{5-6b}{10}=\frac{1}{5}$ ……………………………9 分

$E(Y)=(2.3-a)\cdot\frac{6b+3}{10}+(0.8-a)\cdot\frac{5-6b}{10}+(0.5-a)\cdot\frac{1}{5}=1.19+(0.9\cdot b-a)$

……………………………………………………………………………………………11 分

$\because E(Y)>E(X)\Rightarrow 0.9\cdot b-a>0$，

即：$\frac{1}{2}>b>\frac{10a}{9}\left(a\in[0,0.4]\right)$（备注：$\frac{1}{2}$ 不写出不扣分）……………12 分

21．（12 分）

（1）$\because |AB|+|AF_1|+|BF_1|=4\sqrt{2}$，即 $|AF_2|+|BF_2|+|AF_1|+|BF_1|=4\sqrt{2}$，

又 $\because |AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a, \therefore 4a=4\sqrt{2}, \therefore a=\sqrt{2}$ ……………2 分

又 $\because e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore c=1, \therefore b=1$，

故椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ……………………………………………4 分

（2）依题意知直线 BC 的斜率存在，设直线 $BC: y=kx+m$，

代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $\frac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，

即 $\left(\frac{1}{2}+k^2\right)x^2+2kmx+m^2-1=0$ ①，

$\Delta=(2km)^2-4\left(\frac{1}{2}+k^2\right)(m^2-1)=-2m^2+2+4k^2>0$，

即 $2k^2-m^2+1>0$ ②，

设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则 $A(x_2,-y_2)$，

$x_1+x_2=\dfrac{-2km}{\frac{1}{2}+k^2}$ ③，$x_1x_2=\dfrac{m^2-1}{\frac{1}{2}+k^2}$ ④ ……………………………………………6分

$\because A,F_2,B$ 三点共线，$F_2(1,0)$，直线 AB 不与坐标轴垂直，

$\therefore \dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{-y_2}{x_2-1}$，$\therefore (x_2-1)(kx_1+m)=-(x_1-1)(kx_2+m)$，

$\therefore 2kx_1x_2+m(x_1+x_2)-k(x_1+x_2)-2m=0$，

$$\frac{2k(m^2-1)}{\frac{1}{2}+k^2}-\frac{2km^2}{\frac{1}{2}+k^2}+\frac{2k^2m}{\frac{1}{2}+k^2}-2m=0$$

$\therefore 2km^2-2k-2km^2+2k^2m-m-2k^2m=0$，

$\therefore m=-2k$，$\therefore$ 直线 $BC: y=k(x-2)$，

由②得：$2k^2-4k^2+1>0$，$\therefore k^2<\dfrac{1}{2}$，

$|BC|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，点 $F_1(-1,0)$ 到直线 $BC: kx-y-2k=0$ 的距离 $d=\dfrac{3|k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\Delta F_1BC}=\dfrac{1}{2}|BC|d=\dfrac{3}{2}|k||x_1-x_2|$ ……………………………………………8分

$$\because |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{4k^2}{\frac{1}{2}+k^2}\right)^2-\frac{4(4k^2-1)}{\frac{1}{2}+k^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{16k^4-4(4k^2-1)\left(\frac{1}{2}+k^2\right)}{\left(\frac{1}{2}+k^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{2-4k^2}{\left(\frac{1}{2}+k^2\right)^2}},$$

$$\therefore S_{\Delta F_1BC}=3\sqrt{\frac{k^2(2-4k^2)}{(1+2k^2)^2}}(k\neq 0),$$

设 $2k^2+1=t>1$，则 $k^2=\frac{t-1}{2}$，

$$\therefore S_{\Delta F_1BC}=3\sqrt{\frac{(t-1)(2-t)}{t^2}}=3\sqrt{\frac{-t^2+3t-2}{t^2}}=3\sqrt{-2\left(\frac{1}{t}\right)^2+3\cdot\frac{1}{t}-1}$$

$$=3\sqrt{-2\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}$$ ……………………………………………10 分

所以当 $\frac{1}{t}=\frac{3}{4}$ 时，即 $t=\frac{4}{3}, 2k^2+1=\frac{4}{3}, k^2=\frac{1}{6}$（符合题意），

$S_{\Delta F_1BC}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$，所以当 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时，ΔF_1BC 的面积取最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

……………………………………………………………………………………………12 分

22.（12 分）

（1）定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，

由题意知 $(x^2-x)\ln(|x|-1)=ax$，则 $(x-1)\ln(|x|-1)=a$ 有三个不同的实数根，

当 $x>1$ 时，令 $g(x)=(x-1)\ln(x-1)$，

$\therefore g'(x)=\ln(x-1)+1, \therefore g'(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g'\left(1+\frac{1}{e}\right)=0$，

$\therefore g(x)$ 在 $x\in\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $x\in\left(1+\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)\geq g\left(1+\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ ……………………………………………2 分

当 $x<-1$ 时，令 $h(x)=(x-1)\ln(-x-1)$，

$\therefore h'(x)=\ln(-x-1)+\dfrac{x-1}{x+1}, h''(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$，

又 $h''(-3)=0$，$\therefore h'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,-1)$ 上单调递增，

$\therefore h'(x)\geq h'(-3)=2+\ln 2>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增 ……………………………………………………5 分

又 $h(-2)=0$，

当 $x\to -1^-$ 时，$h(x)\to +\infty$，当 $x\to -\infty$ 时，$h(x)\to -\infty$，

当 $x\to 1^+$ 时，$g(x)\to 0^-$，当 $x\to +\infty$ 时，$g(x)\to +\infty$，

$\therefore -\dfrac{1}{e}<a<0$ ……………………………………………………………………6 分

（2）由已知可知 $(x-1)\ln(|x|-1)=a$ 有 3 个零点 x_1,x_2,x_3，

不妨设 $x_1<x_2<x_3$，

显然 $-2<x_1<-1$，由（1）中函数 $g(x)$ 性质且 $\because \dfrac{a}{1+\frac{1}{e}}>\dfrac{-\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}}>-\dfrac{1}{e}$，

$\therefore 1<x_2<1+\dfrac{1}{e}<x_3<2$，

只需证 $x_2+x_3>2+\dfrac{2}{e}$，即 $x_3>2+\dfrac{2}{e}-x_2$ ……………………………………8 分

又 $g\left(2\left(1+\dfrac{1}{e}\right)-x_2\right)-g(x_2)=\left(1+\dfrac{2}{e}-x_2\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{e}-x_2\right)-(x_2-1)\ln(x_2-1)<0$，

上面不等式证明如下：

令 $\varphi(x)=\left(1+\dfrac{2}{e}-x\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{e}-x\right)-(x-1)\ln(x-1), x\in\left(1,1+\dfrac{1}{e}\right)$，

$$\varphi'(x)=-\ln\left(1+\frac{2}{e}-x\right)-\ln(x-1)-2, x\in\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$$

$$=\ln\left[\left(1+\frac{2}{e}-x\right)(x-1)\right]-2>0,$$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $x\in\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增，

$\therefore \varphi(x)<\varphi\left(1+\frac{1}{e}\right)=0$ ……………………………………………………………10 分

又 $-x_2>-1-\frac{1}{e}, 2+\frac{2}{e}-x_2>1+\frac{1}{e}$，

$\therefore g\left(2\left(1+\frac{1}{e}\right)-x_2\right)<g(x_2)$，又显然有 $g(x_2)<g(x_3)$，

$\therefore 2\left(1+\frac{1}{e}\right)-x_2<x_3$，

$\therefore x_2+x_3>2+\frac{2}{e}$，

$\therefore x_1+x_2+x_3>\frac{2}{e}$ ……………………………………………………

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！