

人大附中 2022~2023 学年度第一学期高二年级数学期中练习

2022 年 11 月 2 日

制卷人：战景林 审卷人：梁丽平

说明：本试卷六道大题，26 道小题，共 6 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟，请在密封线内填写个人信息。

I 卷（共 18 题，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

1. 已知 $a = (x, 1, 3)$ ， $b = (1, 3, 9)$ ，如果 a 与 b 为共线向量，则 $x =$ ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

2. 在空间四边形 $OABC$ 中， $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ 等于 ()

- A. $\overrightarrow{OA}$ B. $\overrightarrow{AB}$ C. $\overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{AC}$

3. 直线 l 经过点 $(-1, 4)$ ，且倾斜角 $\alpha = 45^\circ$ ，则直线 l 的方程为 ()

- A. $x + y - 1 = 0$ B. $x - y + 5 = 0$ C. $x + y + 1 = 0$ D. $x - y - 5 = 0$

4. 若 l_1 与 l_2 为两条不重合的直线，它们的倾斜角分别为 α_1 ， α_2 ，斜率分别为 k_1 ， k_2 ，则下列命题

- ①若 $l_1 \parallel l_2$ ，则斜率 $k_1 = k_2$ ； ②若斜率 $k_1 = k_2$ ，则 $l_1 \parallel l_2$ ；
③若 $l_1 \parallel l_2$ ，则倾斜角 $\alpha_1 = \alpha_2$ ； ④若倾斜角 $\alpha_1 = \alpha_2$ ，则 $l_1 \parallel l_2$ ；

其中正确命题的个数是 ()。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设向量 a, b, c 不共面，则下列可作为空间的一个基底的是 ()

- A. $\{a+b, b+c, c+a\}$ B. $\{a-b, b-c, c-a\}$
C. $\{a+b, c, a+b+c\}$ D. $\{a-b+c, a+b-c, 3a-b+c\}$

6. 若直线 l 的方向向量为 m ，平面 α 的法向量为 n ，则下列四组向量中能使 $l \perp \alpha$ 的是 ()

A. $m = (-1, 0, 1), n = (1, 0, 1)$

B. $m = (0, 2, 1), n = (0, 1, -2)$

C. $m = (1, -2, 1), n = (-2, 1, -2)$

D. $m = (2, -1, 1), n = (-4, 2, -2)$

7. 已知直线 $l_1: (a^2 - 1)x + 3y = 0$ 与直线 $l_2: x + (a + 1)y + 4 = 0$ 垂直，则实数 a 的值为 ()

A. $a = -1$

B. $a = -2$

C. $a = -1$ 或 $a = -2$

D. 不存在

8. 已知两个不同的平面 α, β ，两条不同的直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \alpha$ ，则“ $a \parallel \beta, b \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 已知复数 z 满足 $(z + 2i)(2 - i) = 5$ ，则 $|z| =$ ()

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{6}$

10. 已知函数 $f(x) = mx - |2x - 1|$ ，若满足 $f(x) \geq 0$ 的整数解恰有 3 个，则实数 m 的范围为 ()

A. $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{4}\right]$

B. $\left[-\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}\right]$

C. $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{4}\right)$

D. $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。请把结果填在答题纸上的相应位置。)

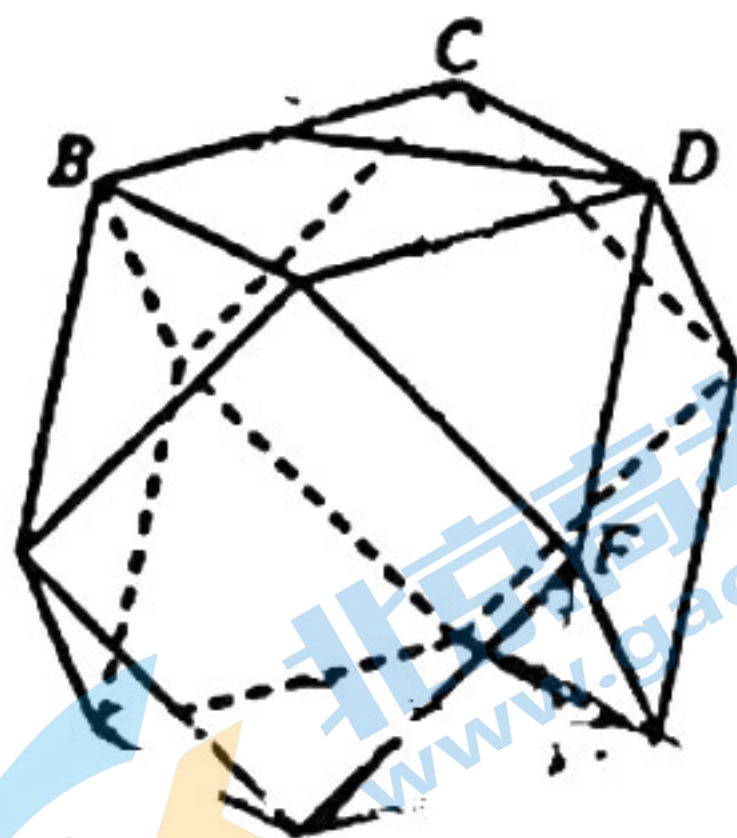
11. 已知点 $P(3, -1, -2)$ ，则点 P 到原点的距离是 _____，点 P 关于 x 轴的对称点的坐标为 _____

12. 复数 $1 + 2i$ 的虚部是 _____，它的共轭复数在第 _____ 象限。

13. 已知 $A(1, 2)$ ， $B(3, 1)$ ， $C(2, 0)$ ，则点 C 到直线 AB 的距离为 _____

14. 已知 $2i + a (a \in \mathbb{R})$ 是方程 $2x^2 - 12x + b = 0$ 的一个虚根，则实数 b 的值为 _____

15. 有很多立体图形都体现了数学的对称美, 其中半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体, 半正多面体因其最早由阿基米德研究发现, 故也被称作阿基米德体. 如图, 这是一个棱数为 24, 棱长为 $\sqrt{2}$ 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 可以看成是由一个正方体截去八个一样的四面体所得, 这个正多面体的表面积为_____. 若点 E 为线段 BC 上的动点, 则直线 DE 与直线 AF 所成角的余弦值的取值范围为_____.



三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 35 分, 解答应写出文字说明过程或演算步骤, 请将答案写在答题纸上的相应位置.)

16. (本小题 8 分)

已知复数 $z = m(m+2) + (m^2 + m - 2)i$.

(1) 若 z 是纯虚数, 求实数 m 的值;

(2) 若 z 在复平面内对应的点位于第四象限, 求实数 m 的取值范围.

17. (本小题 12 分)

在平面直角坐标系 xOy , 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(m, n)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 3)$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 4.

(1) 求 BC 边所在直线的一般式方程;

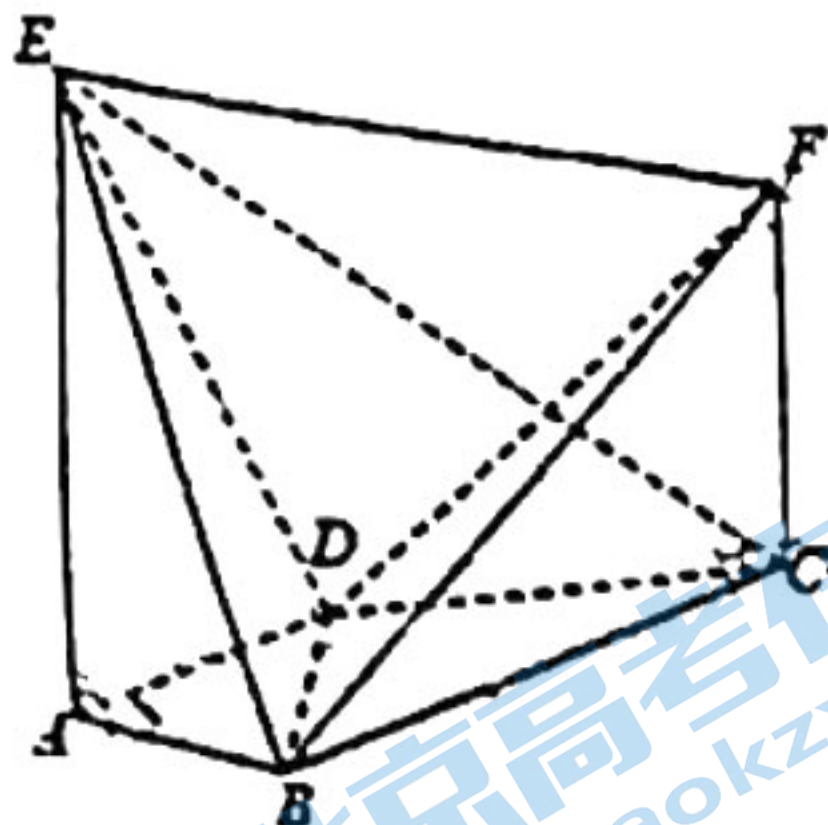
(2) 请写出 n 与 m 的关系式; (用 m 表示 n)

(3) BC 边上中线 AD 的方程为 $x - 2y + t = 0 (t \in \mathbb{R})$, 求点 A 的坐标.

18. (本小题 15 分)

如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = AD = 1$.

$AE = BC = 2$.



(I) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;

(II) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(III) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.

II 卷 (共 8 道题, 满分 50 分)

四. 选择题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

19. 已知 O, A, B, C 为空间中不共面的四点, 且 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$, 若 P, A, B, C 四点共面, 则实数 t 的值是 ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $-\frac{3}{4}$

20. 已知直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 2$, 直线 l_2 是直线 l_1 绕点 $P(-2, 1)$ 逆时针旋转 45° 得到的直线, 则直线 l_2 的方程是 ()

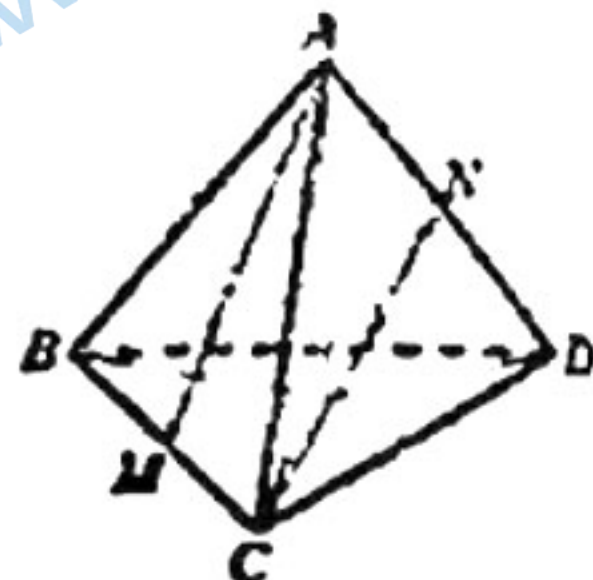
A. $y = x + 3$

B. $y = -2x - 3$

C. $y = 4x + 9$

D. $y = 3x + 7$

21. 如图, 在棱长为 1 的正四面体 (四个面都是正三角形) $ABCD$ 中, M, N 分别为 BC, AD 的中点, 则直线 AM 和 CN 夹角的余弦值为 () .



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

22. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $(x - y)^2 + \left(x + \frac{1}{y} - 1\right)^2$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

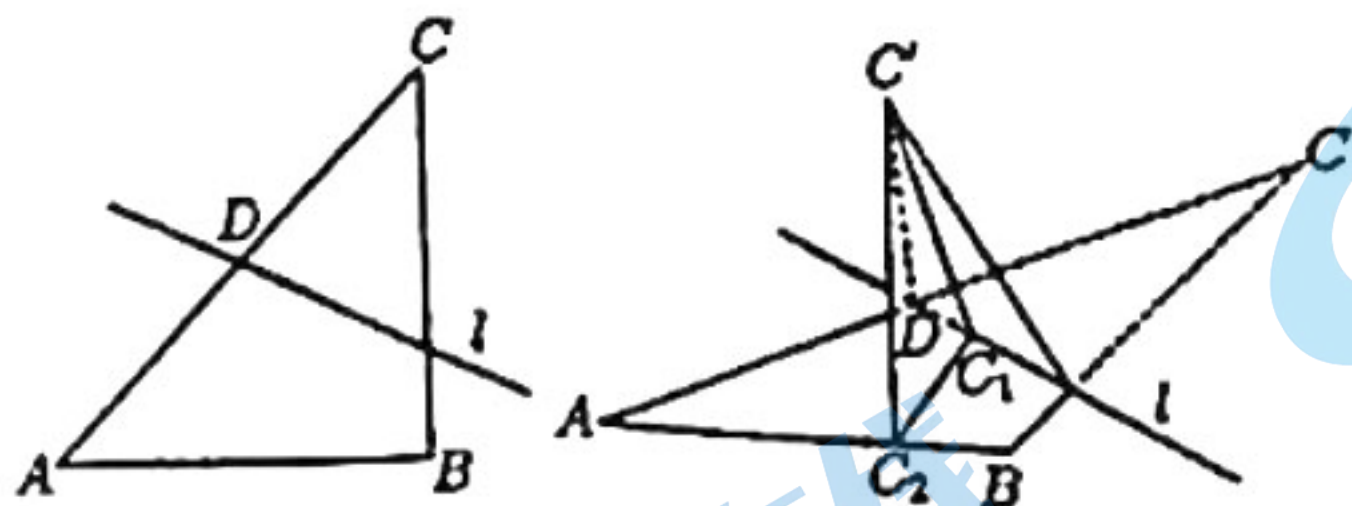
D. $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

五. 填空题 (共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分, 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

23. 设直线 l 的斜率为 k , 且 $-1 \leq k < \sqrt{3}$, 直线 l 的倾斜角 α 的取值范围为_____.

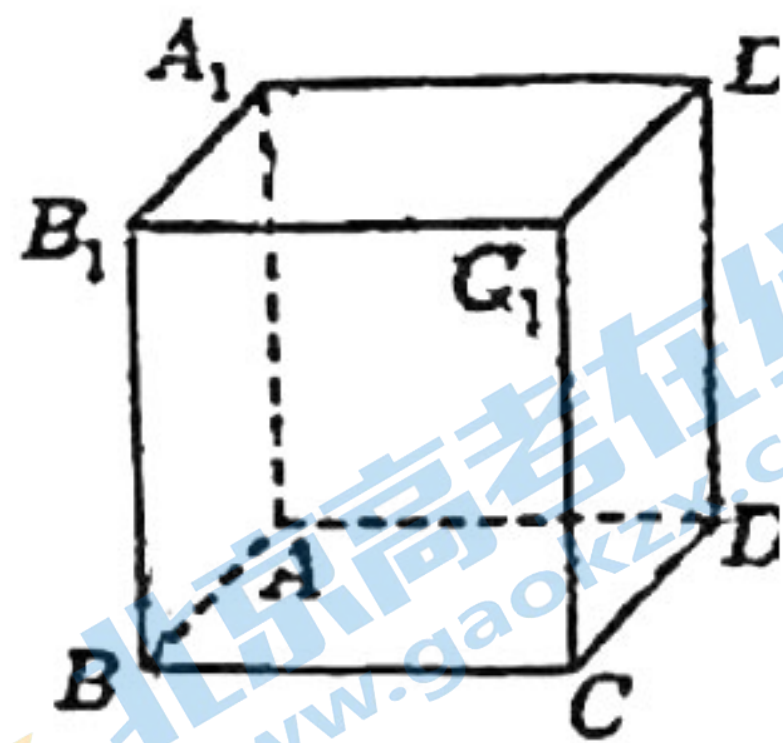
24. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句为“白日登山望烽火, 黄昏饮马傍交河”, 其中隐含了一个有趣的数学问题——“将军饮马”, 即将军在白天观望烽火台之后黄昏时从山脚下某处出发, 先到河边饮马再回到军营, 怎样走才能使总路程最短? 在平面直角坐标系中, 已知军营所在的位置为 $B(-2, 0)$, 若将军从山脚下的点 $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 处出发, 河岸线所在直线方程为 $x + 2y = 3$, 则“将军饮马”的最短总路程为_____.

25. 如图1, 等腰直角三角形 ABC , $AB=BC=8$, D 为 AC 中点, l 为平面 ABC 内过 D 点的一条动直线, 沿直线 l 作如图2的翻折, 点 C 在翻折过程中记为点 C' , C' 在直线 l 上的射影为 C_1 , C' 在平面 ABC 上的射影 C_2 落在直线 AB 上, 则当 $\frac{CC_1}{CC_2}$ 取得最小值时, C_1 到直线 AB 的距离为_____.



六. 解答题 (本小题 15 分, 解答应写出文字说明过程或演算步骤, 请将答案写在答题纸上的相应位置.)

26. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.



(1)若正方体的棱长为1, 求点 A 到平面 A_1BD 的距离;

(2)在一个棱长为10的密封正方体盒子中, 放一个半径为2的小球, 任意摇动盒子, 求小球在盒子中不能达到的空间的体积;

(3)在空间里, 是否存在一个正方体, 它的顶点

$A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ 到某个平面的距离恰好为0、1、2、3、4、5、6、7, 若存在,

求出正方体的棱长, 并说明位置; 若不存在, 说明理由.

人大附中 2022~2023 学年度第一学期高二年级数学期中练习答案

参考答案和评分标准 2022.11.2

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	D	A	D	C	B	C	C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。）

题号	11	12	13	14	15
答案	$\sqrt{14}$, $(-3, 1, -2)$	2, 四	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$	26	$12+4\sqrt{3}$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【注：11、12、15 题第一空 3 分，第二空 2 分。】

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分。）

16. 本小题 8 分

(1)

若复数是纯虚数，则 $\begin{cases} m(m+2)=0 \\ m^2+m-2 \neq 0 \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} m=0 \text{ 或 } m \neq -2 \\ m \neq 1 \text{ 且 } m \neq 2 \end{cases}$

所以 $m=0$ 4 分

(2) 复数 z 在复平面内对应的点位于第四象限，

则 $\begin{cases} m(m+2) > 0 \\ m^2+m-2 < 0 \end{cases}$ 6 分

解得 $0 < m < 1$,

故 m 的取值范围为 $(0, 1)$ 8 分

17. 本小题 12 分

(1)

由 $B(2, 1), C(-2, 3)$ ，可得直线 BC 的斜率 $k = \frac{1-3}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$ 1 分

故直线 BC 的方程为 $y-3 = -\frac{1}{2}(x+2)$ 2 分

(2)

由 $B(2,1), C(-2,3)$, $|BC| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$,3 分

由 $S = 4$, 可以得出 BC 边上的高为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$,4 分

根据点到直线距离公式, $\frac{|m+2n-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,6 分

则 $m+2n=0$ 或 8 ,8 分

即 $n = \frac{8-m}{2}$ 或 $n = -\frac{m}{2}$ ①

(注: 若本题第 1、2 小问答案正确, 但有未按题目要求形式写出者, 仅扣 1 分.)

(3) 由 $B(2,1), C(-2,3)$, 可得 BC 的中点 D 的坐标为 $(0,2)$

又由 AD 的方程为 $x-2y+t=0$, 则有 $-4+t=0$, 解得 $t=4$,9 分

故 AD 的方程为 $x-2y+4=0$.

由 $A(m,n)$, 可得 $m-2n+4=0$. ②10 分

由第 (2) 问知, 联立①②可得 $\begin{cases} m=-2 \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$.

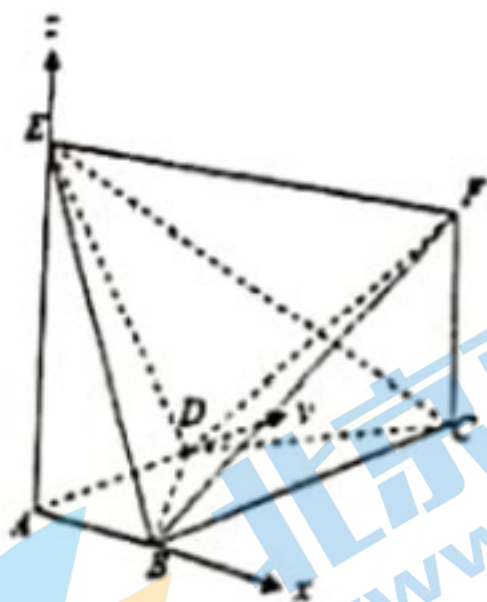
故点 A 的坐标为 $(-2,1)$ 或 $(2,3)$,12 分

18. (本小题 15 分)

【答案】

(I) 证明: 因为 $AE \perp$ 平面 $ABCD$, AD, AB 在平面 $ABCD$ 内, 则 $AE \perp AD$,

$AE \perp AB$, 又 $AD \perp AB$, 故以 A 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,1 分



可得 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,2,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,2)$,2 分

设 $CF = h (h > 0)$, 则 $F(1,2,h)$.

则 $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量, 又 $\overrightarrow{BF} = (0,2,h)$, 可得

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又 $\because$ 直线 $BF \not\subset$ 平面 ADE , $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore BF \parallel$ 平面 ADE ; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 解: 依题意, $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{CE} = (-1, -2, 2)$.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -x + 2z = 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

令 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (2, 2, 1)$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{4}{9}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore$ 直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$; $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

(III) 解: 设 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 BDF 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = -x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 2y_1 + hz_1 = 0 \end{cases},$$

取 $y_1 = 1$, 可得 $\vec{m} = (1, 1, -\frac{2}{h})$, $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$\text{由题意, } |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 - \frac{2}{h}|}{3 \times \sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

解得 $h = \frac{8}{7}$.

经检验, 符合题意, $\therefore$ 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

第II卷（共8道题，满分50分）

一、选择题（共4小题，每小题5分，共20分。）

题号	19	20	21	22
答案	C	D	A	C

二、填空题（共3小题，每小题5分，共15分。）

题号	23	24	25
答案	$\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$	$\frac{\sqrt{145}}{3}$	$6-2\sqrt{2}$

三、解答题（本小题15分。）

25.（本小题满分15分）

【答案】(1)

正方体的棱长为1，设点A到平面 A_1BD 的距离为 h ，

由 $V_{A-A_1BD} = V_{A_1-ABD}$ ，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \cdot AA_1$ ，.....2分

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1,$$

解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$4分

(2)

在正方体的8个顶点处的立方体空间内，

$$\text{小球不能到达的空间为: } 8 \left[2^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi}{3} \times 2^3 \right) \right] = 64 - \frac{32\pi}{3}, \text{.....6分}$$

除此之外，以正方体的棱为一条棱的12个 $2 \times 2 \times 6$ 的正四棱柱空间内，

$$\text{小球不能到达的空间共 } 12 \left[2 \times 2 \times 6 - \frac{1}{4} (\pi \times 2^2) \times 6 \right] = 288 - 72\pi, \text{.....8分}$$

其它空间小球均能到达，

$$\text{故小球不能到达的空间体积为: } 64 - \frac{32}{3}\pi + 288 - 72\pi = 352 - \frac{248}{3}\pi \text{.....9分}$$

(3)

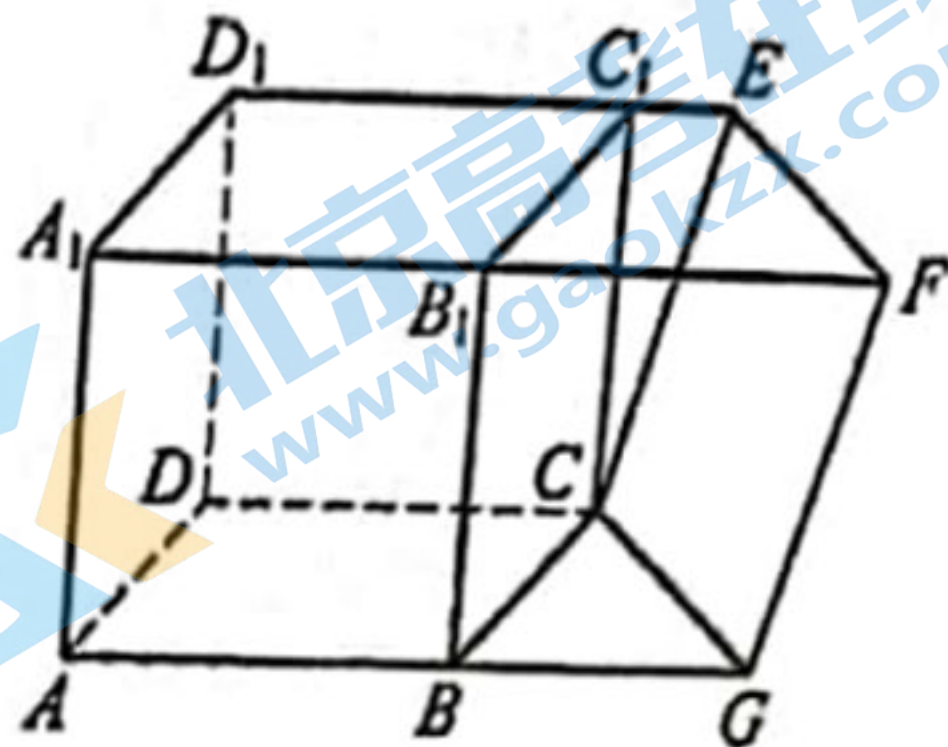
设平面 α 为符合题意的平面， α 过点 C ，

延长 D_1C_1, A_1B_1, AB 分别交平面 α 于点 E, F, G ，

由图可知，点 $C, C_1, B, B_1, D, D_1, A, A_1$

与平面 α 的距离分别应为0、1、2、3、4、5、6、7，

因为 D_1E, A_1F, DC, AG 互相平行，所以它们与平面 α 所成角相等，



故由比例关系得 $C_1E:BG:B_1F:DC:D_1E:AG:A_1F=1:2:3:4:5:6:7$10分

设正方体的棱长为 $4a$ ，则 $C_1E=a, BG=2a, B_1F=3a$ ，.....11分

用几何方法可解得 $EF=2\sqrt{5}a, EC=\sqrt{17}a, CF=\sqrt{41}a$ ，

故 $S_{\triangle ECF}=2\sqrt{21}a^2$ ，.....12分

由 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，知 CC_1 为四面体 $C-EC_1F$ 的底面 EC_1F 上的高，

所以由 $V_{C_1-ECF}=V_{C-EC_1F}$ ，算得点 C_1 到平面 α 的距离，

$$d = \frac{S_{\triangle EC_1F} \cdot |CC_1|}{S_{\triangle ECF}} = \frac{2a^2 \cdot 4a}{2\sqrt{21}a^2} = \frac{4\sqrt{21}}{21}a, \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

实际上已知 $d=1$ ，所以 $\frac{4\sqrt{21}}{21}a=1$ ，从而可得 $a=\frac{\sqrt{21}}{4}$ ，.....14分

所以正方体的棱长为 $4a=\sqrt{21}$ ，由图可知，该正方体存在.....15分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯