2024年度高三寒假新结构适应性测试模拟试卷（三）

数学试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．已知集合 $A=\{x|x^2\leq 4\}$，集合 $B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=($　　$)$

A．$(0，2]$　　B．$[-2，0)$

C．$(-\infty，-2]$　　D．$[-2，+\infty)$

答案　D

解析　由题意 $A=\{x|x^2\leq 4\}=\{x|-2\leq x\leq 2\}$，$B=\{x|x>0\}$，所以 $A\cup B=\{x|-2\leq x\leq 2\}\cup\{x|x>0\}=\{x|x\geq -2\}=[-2，+\infty)$．故选D.

2．若复数 z_1，z_2 在复平面内对应的点关于 x 轴对称，且 $z_1=2-i$，则复数 $\frac{z_1}{z_2}=$（　　）

A．$-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　B．$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

C．$-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$　　D．$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

答案　B

解析　复数 $z_1=2-i$ 在复平面内对应的点为 $Z_1(2，-1)$，所以复数 z_2 在复平面内对应的点为 $Z_2(2，1)$，即 $z_2=2+i$，则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.故选B.

3．某学校共 1000 人参加数学测验，考试成绩ξ近似服从正态分布 $N(100，\sigma^2)$，若 $P(80\le\xi\le100)=0.45$，则估计成绩在 120 分以上的学生人数为(　　)

A．25　　　　B．50

C．75　　　　D．100

答案　B

解析　由已知可得$\mu=100$，所以 $P(\xi\ge100)=0.5$，又 $P(80\le\xi\le100)=0.45$，则 $P(100\le\xi\le120)=0.45$，所以 $P(\xi>120)=P(\xi\ge100)-P(100\le\xi\le120)=0.5-0.45=0.05$，即可估计成绩在 120 分以上的学生人数为 $1000\times0.05=50$.故选 B.

4．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=0$，$f(x_2)=\sqrt{3}$，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\pi$，则$\omega$的值为(　　)

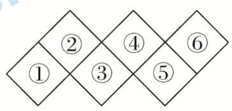
A．$\frac{2}{3}$　　　　B．$\frac{1}{2}$

C．1　　　　D．2

答案　B

解析　$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\frac{3}{2}\cos\omega x=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\sqrt{3}$是函数的最大值，由题意可知，$|x_1-x_2|$的最小值是$\frac{1}{4}$个周期，所以$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得$\omega=\frac{1}{2}$.故选 B.

5．用红、黄、蓝三种颜色给下图着色，要求有公共边的两块不着相同颜色．在所有着色方案中，①③⑤着相同颜色的有(　　)



A．96 种　　　　B.48 种

C．24 种　　　　D.12 种

答案　C

解析　因为①③⑤着相同的颜色，可以有 $C_3^1=3$ 种，②④⑥按要求可随意着与①③⑤不同色的另外两种颜色，故有 $C_2^1\times C_2^1\times C_2^1=8$ 种，所以共有 24 种．故选 C.

6．已知奇函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，$g(x)=xf(x)$，若 $a=g(-\log_2 5.1)$，$b=g(3)$，$c=g(2^{0.8})$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

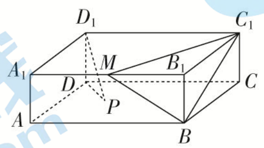
A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$

C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

答案　D

解析　因为 $f(x)$为奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，且 $x>0$ 时，$f(x)<0$，又 $g(x)=xf(x)$，所以 $g(-x)=-xf(-x)=xf(x)$，故 $g(x)$为偶函数．当 $x>0$ 时，$g'(x)=f(x)+xf'(x)$，又 $f(x)<0$，$f'(x)<0$，所以 $g'(x)<0$，即 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，$a=g(-\log_2 5.1)=g(\log_2 5.1)$，因为 $3=\log_2 8>\log_2 5.1>\log_2 4=2>2^{0.8}$，所以 $g(3)<g(\log_2 5.1)<g(2^{0.8})$，即 $b<a<c$.故选 D.

7．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$，$AA_1=1$，M 为 A_1B_1 的中点，P 为底面 $ABCD$ 上一点，若直线 D_1P 与平面 BMC_1 没有交点，则$\triangle D_1DP$ 面积的最小值为(　　)

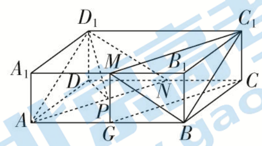


A．1　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

答案　C

解析　因为直线 D_1P 与平面 BMC_1 没有交点，所以 D_1P // 平面 BMC_1，取 CD 的中点 N，连接 AN，D_1N，AD_1，取 AB 的中点 G，连接 MG，CG，如图．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB // A_1B_1$ 且 $AB=A_1B_1$，因为 G，M 分别为 AB，A_1B_1 的中点，所以 $BG // B_1M$ 且 $BG=B_1M$，即四边形 BB_1MG 为平行四边形，则 $MG // BB_1$ 且 $MG=BB_1$.因为 $BB_1 // CC_1$ 且 $BB_1=CC_1$，所以 $MG // CC_1$ 且 $MG=CC_1$，即四边形 $MGCC_1$ 为平行四边形，则 $MC_1 // CG$.因为 $AB // CD$ 且 $AB=CD$，G，N 分别为 AB，CD 的中点，则 $AG // CN$ 且 $AG=CN$，所以四边形 $AGCN$ 为平行四边形，则 $AN // CG$，所以 $AN // MC_1$.因为 $AN\not\subset$ 平面 BMC_1，$MC_1\subset$ 平面 BMC_1，所以 $AN //$ 平面 BMC_1，同理可证 $D_1N //$ 平面 BMC_1.因为 $AN\cap D_1N=N$，AN，$D_1N\subset$ 平面 AD_1N，所以平面 $AD_1N //$ 平面 BMC_1，故当 P 在 AN 上运动时，$D_1P\subset$ 平面 AD_1N，则 $D_1P //$ 平面 BMC_1，当 $DP\perp AN$ 时，DP 最小，且最小值为 $\dfrac{AD\cdot DN}{AN}=\dfrac{4\times 2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，此时 $\triangle D_1DP$ 的面积最小，且最小值为 $\dfrac{1}{2}DD_1\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.故选 C.



8．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，其一条渐近线方程为 $x+\sqrt{3}y=0$，右顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在其右支上，点 $B(3，1)$，$\triangle F_1AB$ 的面积为 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则当 $|PF_1|-|PB|$ 取得最大值时点 P 的坐标为(　　)

A．$\left(3-\dfrac{\sqrt{6}}{2}，1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

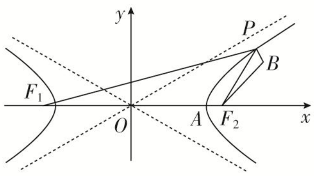
B．$\left(3+\dfrac{\sqrt{6}}{2}，1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

C．$\left(3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}，1+\dfrac{\sqrt{3}}{10}\right)$

D．$\left[\frac{6+5\sqrt{78}}{22}，\frac{10+\sqrt{78}}{22}\right)$

答案　B

解析　设 $F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，则$\frac{1}{2}(a+c)\times1=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $a+c=2+\sqrt{3}$，又$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $a=\sqrt{3}b$，故 $c^2=a^2+b^2=4b^2$，$c=2b$，故 $\sqrt{3}b+2b=2+\sqrt{3}$，解得 $b=1$，故 $a=\sqrt{3}, c=2$，双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$.又$|PF_1|-|PB|=2\sqrt{3}+|PF_2|-|PB|\leq2\sqrt{3}+|BF_2|$，当且仅当 P，B，F_2 共线且 B 在 P，F_2 之间时取得等号．此时直线 BF_2 的方程为 $y=\frac{1}{3-2}(x-2)$，即 $y=x-2$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\ y=x-2,\end{cases}$得 $2x^2-12x+15=0$，解得 $x=3\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，由题意可得 $x=3+\frac{\sqrt{6}}{2}$，代入 $y=x-2$ 得 $y=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 $P\left(3+\frac{\sqrt{6}}{2}，1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.故选 B.



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．若过点$(a，b)$可作曲线 $y=x^2-2x$ 的两条切线，则点$(a，b)$可以是(　　)

A．(0，0)　　　　B．(3，0)

C．(1，1)　　　　D．(4，3)

答案　BD

解析　设切点坐标为$(t，t^2-2t)$，对函数 $y=x^2-2x$ 求导，可得 $y'=2x-2$，所以切线斜率为 $k=2t-2$，所以曲线 $y=x^2-2x$ 在点$(t，t^2-2t)$处的切线方程为 $y-(t^2$

$-2t)=(2t-2)(x-t)$，即 $y=(2t-2)x-t^2$，将点$(a，b)$的坐标代入切线方程可得 $b=(2t-2)a-t^2$，即 $t^2-2at+2a+b=0$.因为过点$(a，b)$可作曲线 $y=x^2-2x$ 的两条切线，则关于 t 的方程 $t^2-2at+2a+b=0$ 有两个不等的实数解，所以$\Delta=4a^2-4(2a+b)>0$，即 $a^2-2a-b>0$，即 $b<a^2-2a$.对于点$(0，0)$，$0=0^2-2\times0$，A 不符合题意；对于点$(3，0)$，$0<3^2-2\times3$，B 符合题意；对于点$(1，1)$，$1>1^2-2\times1$，C 不符合题意；对于点$(4，3)$，$3<4^2-2\times4$，D 符合题意．故选 BD.

10．对于一个事件 E，用 $n(E)$表示事件 E 中样本点的个数．在一个古典概型的样本空间Ω和事件 A，B，C，D 中，$n(\Omega)=100$，$n(A)=60$，$n(B)=40$，$n(C)=20$，$n(D)=10$，$n(A\cup B)=100$，$n(A\cap C)=12$，$n(A\cup D)=70$，则(　　)

A．A 与 D 不互斥　　　　B.A 与 B 互为对立

C．A 与 C 相互独立　　　　D.B 与 C 相互独立

答案　BCD

解析　对于 A，$\because n(A)=60$，$n(D)=10$，$n(A\cup D)=70$，$\therefore n(A\cup D)=n(A)+n(D)$，$\therefore A$ 与 D 互斥，故 A 错误；对于 B，$\because n(A\cup B)=n(A)+n(B)=n(\Omega)$，$\therefore A$ 与 B 互为对立，故 B 正确；对于 C，$\because P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{5}$，$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{1}{5}$，$P(A\cap C)=\frac{n(A\cap C)}{n(\Omega)}=\frac{3}{25}$，$\therefore P(A\cap C)=P(A)P(C)=\frac{3}{25}$，$\therefore A$ 与 C 相互独立，故 C 正确；对于 D，$\because n(\Omega)=100$，$n(A)=60$，$n(B)=40$，$n(C)=20$，$n(A\cup B)=100$，$n(A\cap C)=12$，$\therefore n(B\cap C)=8$，$\therefore P(B\cap C)=\frac{n(B\cap C)}{n(\Omega)}=\frac{2}{25}$，又 $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{5}$，$P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{1}{5}$，$\therefore P(B\cap C)=P(B)P(C)=\frac{2}{25}$，$\therefore B$ 与 C 相互独立，故 D 正确．故选 BCD.

11．折扇在我国已有三四千年的历史，“扇”与“善”谐音，折扇也寓意“善良”“善行”．它以字画的形式集中体现了我国文化的方方面面，是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征(如图 1)．图 2 是一个圆台(上底面面积小于下底面面积)的侧面展开图(扇形的一部分)，若扇形的两个圆弧所在圆的半径分别是 1 和 3，且$\angle ABC=120°$，则该圆台的(　　)

图 1

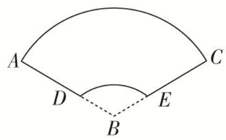


图 2

A．高为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B．表面积为$\frac{34\pi}{9}$

C．体积为$\frac{52\sqrt{2}\pi}{81}$

D．上底面面积、下底面面积和侧面积之比为 1∶9∶24

答案　BCD

解析　对于 A，设圆台的上底面半径为 r，下底面半径为 R，则 $2\pi r=\frac{1}{3}\times2\pi\times1$，$2\pi R=\frac{1}{3}\times2\pi\times3$，解得 $r=\frac{1}{3}$，$R=1$，又圆台的母线长为 $3-1=2$，所以高为 $h=\sqrt{2^2-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，A 错误；对于 B，圆台的上底面面积为$\frac{\pi}{9}$，下底面面积为$\pi$，侧面积为$\pi\times\left(\frac{1}{3}+1\right)\times2=\frac{8\pi}{3}$，所以圆台的表面积为 $S=\frac{\pi}{9}+\pi+\frac{8\pi}{3}=\frac{34\pi}{9}$，B 正确；对于 C，圆台的体积为 $V=\frac{\pi}{3}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times1+1^2\right]\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{52\sqrt{2}\pi}{81}$，C 正确；对于 D，圆台的上底面面积、下底面面积和侧面积之比为$\frac{\pi}{9}$∶π∶$\frac{8\pi}{3}$＝1∶9∶24，D 正确．故选

BCD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

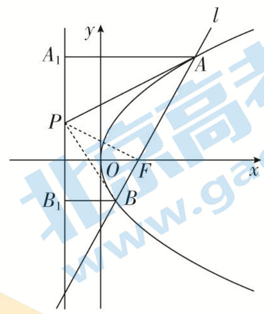
12．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是互相垂直的两个单位向量，若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，请写出一个符合题意的λ的值：________．

答案　0(答案不唯一)

解析　设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ，因为向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cos\theta<0$ 且$\lambda\neq-1$，所以$\lambda\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2<0$，又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，解得$\lambda<1$，所以$\lambda\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)$．

13．过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，点 A，B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1，B_1，$|A_1B_1|=10$，点 P 在抛物线的准线上．若 AP 是$\angle A_1AB$ 的角平分线，则点 P 到直线 l 的距离为________．

答案　5



解析　如图，连接 PF，PB，由抛物线的定义可知，$|AF|=|AA_1|$，又$\angle PAA_1=\angle PAF$，$|AP|=|AP|$，所以$\triangle PAA_1\cong\triangle PAF$，所以$|PA_1|=|PF|$，

$\angle PFA=\angle PA_1A=\frac{\pi}{2}$，即 $PF\perp AB$，所以$|PF|$就是点 P 到直线 l 的距离，因为$|BF|=|BB_1|$，$|PB|=|PB|$，$\angle PFB=\angle BB_1P=\frac{\pi}{2}$，所以$\triangle PFB\cong\triangle PB_1B$，所以$|PB_1|=|PF|$，所以$|PA_1|=|PF|=|PB_1|$，又$|A_1B_1|=10$，所以$|PA_1|=|PF|=|PB_1|=5$，故点 P 到直线 l 的距离为 5．

14．若$\left(\frac{1}{3x}+\sqrt{x}\right)^n$展开式的所有项的二项式系数和为 256，则展开式中系数最大的项的二项式系数为________．(用数字作答)

答案　28

解析　因为展开式的所有项的二项式系数和为 $2^n=256$，解得 $n=8$，则 $\left(\frac{1}{3x}+\sqrt{x}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r\left(\frac{1}{3x}\right)^{8-r}\cdot(\sqrt{x})^r=\frac{C_8^r}{3^{8-r}}x^{\frac{3r}{2}-8}$，$r=0,1,2,\ldots,8$，可得第 $r+1$ 项的系数为 $a_{r+1}=\frac{C_8^r}{3^{8-r}}$，$r=0,1,2,\ldots,8$。令 $\begin{cases}a_{r+1}\geq a_{r+2},\\a_{r+1}\geq a_r,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{C_8^r}{3^{8-r}}\geq\frac{C_8^{r+1}}{3^{7-r}},\\\frac{C_8^r}{3^{8-r}}\geq\frac{C_8^{r-1}}{3^{9-r}},\end{cases}$ 解得 $r=6$。又 $a_1=\frac{C_8^0}{3^8}=\frac{1}{3^8}$，$a_9=\frac{C_8^8}{3^0}=1$，$a_7=\frac{C_8^6}{3^2}=\frac{28}{9}$，所以展开式中第 7 项的系数最大，其二项式系数为 $C_8^6=28$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=0$，且 $a_n>0(n\geq2)$，$a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，若 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n<m$ 恒成立，求整数 m 的最小值．

解　(1)∵ $a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}=S_{n+1}-S_n$，

∴ $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$，

∴ $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=0$，公差 $d=1$ 的等差数列，

∴ $\sqrt{S_n}=n-1$，$S_n=(n-1)^2$，当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$，当 $n=1$ 时，$a_1=0$ 不符合上式，因此 $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\2n-3, & n\geq2.\end{cases}$

(2)由(1)得 $b_n=\frac{a_n}{2^n}=\begin{cases}0, & n=1,\\ \frac{2n-3}{2^n}, & n\geq 2,\end{cases}$ $T_n=b_1+b_2+\dots+b_n=0+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+$

$\frac{2n-3}{2^n}=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{2n-3}{2^n}$,

$\frac{T_n}{2}=\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\dots+\frac{2n-5}{2^n}+\frac{2n-3}{2^{n+1}}$,

作差可得$\frac{T_n}{2}=\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{2n-3}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}+2\times\frac{\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-3}{2^{n+1}}$

$=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2^{n+1}}$,

$\therefore T_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{2^n}<\frac{3}{2}$,

又当 $n=5$ 时，$T_n=\frac{3}{2}-\frac{11}{32}>1$，

∴整数 m 的最小值为 2.

16．在①$2a=b+2c\cos B$；②$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=2\sqrt{3}a\cos C$；③$\sqrt{3}\sin C=3-2\cos^2\frac{C}{2}$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

问题：在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足________.

(1)求角 C 的大小;

(2)若 $c=2\sqrt{3}$，$\angle ABC$ 与$\angle BAC$ 的平分线交于点 I，求△ABI 周长的最大值.

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分.

解　(1)选择条件①$2a=b+2c\cos B$,

在△ABC 中，由余弦定理得

$2a=b+2c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b+\dfrac{a^2+c^2-b^2}{a}$,

整理得 $a^2+b^2-c^2=ab$,

则 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$,

又 $C\in(0，\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

选择条件②$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=2\sqrt{3}a\cos C$,

于是 $a\sin A\cos B+b\sin A\cos A=\sqrt{3}a\cos C$,

在△ABC 中，由正弦定理得 $\sin^2A\cos B+\sin A\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C$,

因为 $\sin A\neq 0$，则 $\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$=\sqrt{3}\cos C$，即 $\sin(A+B)=\sqrt{3}\cos C$,

因为 $A+B+C=\pi$，因此 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$,

即 $\tan C=\sqrt{3}$,

又 $C\in(0，\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

选择条件③$\sqrt{3}\sin C=3-2\cos^2\dfrac{C}{2}$,

在△ABC 中，因为 $\sqrt{3}\sin C=2-\left(2\cos^2\dfrac{C}{2}-1\right)=2-\cos C$,

即 $\sqrt{3}\sin C+\cos C=2$,

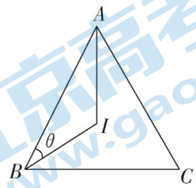
则 $\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,

又 $C\in(0，\pi)$，即 $C+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{7\pi}{6}\right)$,

则 $C+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知，$C=\frac{\pi}{3}$，则$\angle ABC+\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$.



又$\angle BAC$与$\angle ABC$的平分线交于点I,则$\angle ABI+\angle BAI=\frac{\pi}{3}$,

于是$\angle AIB=\frac{2\pi}{3}$,

设$\angle ABI=\theta$，则$\angle BAI=\frac{\pi}{3}-\theta$，且$0<\theta<\frac{\pi}{3}$.

在$\triangle ABI$中，由正弦定理得$\frac{BI}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{AI}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin\angle AIB}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$,

所以$BI=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，$AI=4\sin\theta$,

所以$\triangle ABI$的周长为$2\sqrt{3}+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+4\sin\theta=2\sqrt{3}+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+$
$4\sin\theta=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}$,

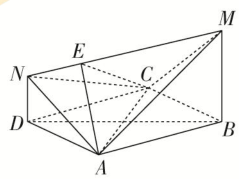
由$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，得$\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$,

则当$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$时,

$\triangle ABI$的周长取得最大值$4+2\sqrt{3}$,

所以$\triangle ABI$周长的最大值为$4+2\sqrt{3}$.

17. 如图，四边形$ABCD$是边长为2的菱形，且$\angle ABC=60°$，$BM\perp$平面$ABCD$，$BM\parallel DN$，$BM=2DN$，E是线段MN上任意一点.



(1)证明：平面$EAC\perp$平面$BMND$;

(2)若$\angle AEC$的最大值是$\frac{2\pi}{3}$，求三棱锥$M-NAC$的体积.

解　(1)证明：因为$BM\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$,

所以 $AC\perp BM$.

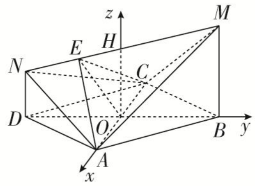
又四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$，

又 $BD\cap BM=B$，BD，$BM\subset$平面 $BMND$，

所以 $AC\perp$平面 $BMND$，

因为 $AC\subset$平面 EAC，

所以平面 $EAC\perp$平面 $BMND$.



(2)设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 EO.因为 $AC\perp$平面 $BMND$，$OE\subset$平面 $BMND$，则 $AC\perp OE$，

又 O 为 AC 的中点，则 $AE=CE$，由余弦定理得

$\cos\angle AEC=\dfrac{2AE^2-AC^2}{2AE^2}=1-\dfrac{2}{AE^2}$，$\angle AEC\in(0,\ \pi)$．当 AE 最短时 $\angle AEC$ 最大，此时 $AE\perp MN$，$CE\perp MN$，$\angle AEC=\dfrac{2\pi}{3}$，因为 $AC=2$，所以 $AE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$OE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.取 MN 的中点 H，连接 OH，以 OA，OB，OH 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系．

设 $ND=a$，则 $A(1,\ 0,\ 0)$，$N(0,\ -\sqrt{3},\ a)$，$M(0,\sqrt{3},\ 2a)$，$C(-1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{AN}=(-1,\ -\sqrt{3},\ a)$，$\overrightarrow{AM}=(-1,\sqrt{3},\ 2a)$，$\overrightarrow{CN}=(1,\ -\sqrt{3},\ a)$，$\overrightarrow{CM}=(1,\sqrt{3},\ 2a)$.

设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1-\sqrt{3}y_1+az_1=0,\\ -x_1+\sqrt{3}y_1+2az_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$，则 $x_1=\dfrac{3a}{2}$，$y_1=-\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$，

所以 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{3a}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}a}{6},\ 1\right)$，

设平面 CMN 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CN}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_2-\sqrt{3}y_2+az_2=0,\\ x_2+\sqrt{3}y_2+2az_2=0,\end{cases}$

取 $z_2=1$，则 $x_2=-\frac{3a}{2}$，$y_2=-\frac{\sqrt{3}a}{6}$，

所以 $\boldsymbol{m}=\left(-\frac{3a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}a}{6},\ 1\right)$.

因为$\angle AEC=\frac{2\pi}{3}$是二面角 $A-MN-C$ 的平面角，

则$|\cos\angle AEC|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle|$

$$=\frac{\left|-\frac{9a^2}{4}+\frac{3a^2}{36}+1\right|}{\frac{9a^2}{4}+\frac{3a^2}{36}+1}=\frac{1}{2},$$

解得 $a=\frac{\sqrt{15}}{10}$或 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

由图可知 $a<OE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$舍去，

所以 $a=\frac{\sqrt{15}}{10}$，

因为 $MN=\sqrt{a^2+BD^2}=\sqrt{\frac{3}{20}+12}=\frac{9\sqrt{15}}{10}$，

$AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$S_{\triangle EAC}=\frac{1}{2}AE^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $V_{M-NAC}=V_{M-EAC}+V_{N-EAC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EAC}\cdot MN=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{9\sqrt{15}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

18.甲、乙两人组团参加答题挑战赛，规定：每一轮甲、乙各答一道题，若两人都答对，该团队得 1 分；只有一人答对，该团队得 0 分；两人都答错，该团队得 - 1 分．假设甲、乙两人答对任何一道题的概率分别为$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$.

(1)记 X 表示该团队一轮答题的得分，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

(2)假设该团队连续答题 n 轮，各轮答题相互独立．记 P_n 表示“没有出现连续三轮每轮得 1 分”的概率，$P_n=aP_{n-1}+bP_{n-2}+cP_{n-3}(n\geq 4)$，求 a，b，c；并证明答题轮数越多(轮数不少于 3)，出现“连续三轮每轮得 1 分”的概率越大．

解　(1)由题意可知，X 的所有可能取值为 -1，0，1，

$P(X=-1)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}$，

$P(X=0)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$，

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$．

故 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

则 $E(X)=-1\times\frac{1}{12}+0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$．

(2)由题意可知，

$P_1=1$，

$P_2=1$，

$P_3=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$，

$P_4=1-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{13}{16}$．

经分析可得，若第 n 轮没有得 1 分，

则 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}$；

若第 n 轮得 1 分，且第 $n-1$ 轮没有得 1 分，则 $P_n=\frac{1}{4}P_{n-2}$；

若第 n 轮得 1 分，且第 $n-1$ 轮得 1 分，第 $n-2$ 轮没有得 1 分，则 $P_n=\frac{1}{8}P_{n-3}$.

故 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}(n\geq4)$，

故 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{1}{8}$.

因为 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}$，

故 $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}$.

故 $P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}\right)+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}=-\frac{1}{16}P_{n-3}<0$.

故 $P_{n+1}<P_n(n\geq4)$，且 $P_1=P_2>P_3>P_4$，

则 $P_1=P_2>P_3>P_4>P_5>\ldots$，

所以答题轮数越多(轮数不少于 3)，出现“连续三轮每轮得 1 分”的概率越大.

19．伯努利不等式，又称贝努利不等式，由数学家伯努利提出：对于实数 $x>-1$ 且 $x\neq0$，正整数 n 不小于 2，那么 $(1+x)^n\geq1+nx$.研究发现，伯努利不等式可以推广，请证明以下问题：

(1)当 $\alpha\in[1,+\infty)$时，$(1+x)^\alpha\geq1+\alpha x$ 对任意 $x>-1$ 恒成立；

(2)对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$1^n+2^n+3^n+\ldots+n^n<(n+1)^n$ 恒成立.

证明　(1)令 $f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x$，

当 $\alpha=1$ 时，$f(x)=0$，原不等式成立；

当$\alpha>1$时，$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$，

当$x\in(-1,0)$时，$(1+x)^{\alpha-1}<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以$f(x)\geq f(0)=0$，即$(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x$.

(2)要证对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$1^n+2^n+3^n+\ldots+n^n<(n+1)^n$恒成立，只需证$\left(\frac{1}{n+1}\right)^n+\left(\frac{2}{n+1}\right)^n+\left(\frac{3}{n+1}\right)^n+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<1$，

即证$\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)^n+\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<1$，

由(1)知对于任意正整数$i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$，$1-\frac{i}{n+1}\leq\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^i$，

所以$\left(1-\frac{i}{n+1}\right)^n\leq\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{ni}=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^i$，

那么$\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)^n+\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n2}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n(n-1)}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n(n-2)}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^n+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^{n-1}+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^{n-2}+\ldots+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^1$，

下面证明$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\frac{1}{2}$成立，

要证$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\frac{1}{2}$成立，

只需证$\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

令$\frac{1}{n}=x\in(0，1]$，即证明 $2^x\leq x+1$ 成立.

令 $g(x)=2^x-1-x$，则 $g'(x)=2^x\ln 2-1$.

当 $0<x<\log_2\frac{1}{\ln 2}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $\log_2\frac{1}{\ln 2}<x\leq 1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

又 $g(0)=0$，$g(1)=0$，所以当 $x\in(0，1]$时，$g(x)\leq 0$，

所以$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\leq\frac{1}{2}$.

所 以 $\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^n+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^{n-1}+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^{n-2}+\ldots+$ $\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^1=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$.

所以命题得证.