

2023 北京人大附中高三 10 月月考

数 学

一、单选题

1、已知集合 $A = \{x | x \leq 2\}$, $B = [0, 3]$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{3\}$ B. $\{0\}$ C. $[0, 2]$ D. $\{0, 3\}$

2、下列函数既是偶函数且又在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数的是 ()

- A. $f(x) = \cos 2x$ B. $f(x) = e^x$
C. $f(x) = \lg|x|$ D. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

3、已知角 θ 的终边过点 $P(-12, 5)$, 则 $\tan \theta =$ ()

- A. $-\frac{5}{12}$ B. $-\frac{12}{5}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{5}{12}$

4、若 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$, $b = 0.3^{-2}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 3$, 则 a, b, c 大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

5、设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b < 0$, 则 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $b^2 > ab$ C. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$

6、某物体做直线运动, 若它所经过的位移 s 与时间 t 的函数关系为 $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1$, 则这个物体在时间段

$[1, 2]$ 内的平均速度为 ()

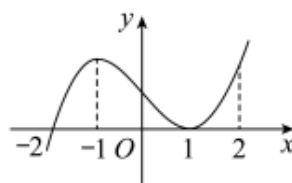
- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. $\frac{5}{2}$

7、已知 $A = \{y | y = 2^x, x < 0\}$, $B = \left\{x | \log_{\frac{1}{2}} x > 1\right\}$, 则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”成立的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8、如图是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 下列结论正确的是 ()

- A. $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值
B. $x = 1$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点
C. $x = -2$ 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点
D. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减



9、已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x \leq 1 \\ -x + a, & x > 1 \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{5}{2}$ ，

则 a 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ 或 2

B. $\frac{2}{3}$ 或 2

C. 2 或 $\frac{7}{2}$

D. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$

10、已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sin|x|} + \frac{1}{\cos x}$ ，在下列结论中：

① 2π 是 $f(x)$ 的一个周期；

② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称；

③ $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上无最大值正确结论的个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

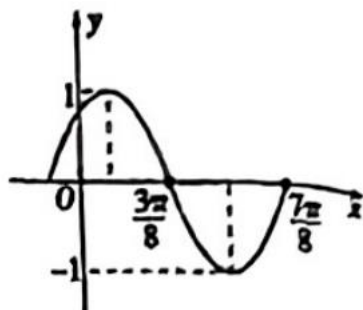
D. 3

二、填空题

11、函数 $f(x) = 2^x + \sqrt{2+x} + \ln(1-x)$ 的定义域为 _____.

12、已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$)，且此函数的一段图象如图所示，则 $\omega =$ _____；

$\varphi =$ _____.



13、在 $\triangle ABC$ 中， $A = 60^\circ$ ， $AC = 2$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积等于 _____.

14、扶贫小组帮助某农户建造一个面积为 100 m^2 的矩形养殖区，有一面利用旧墙不花钱，正面用铁栅，每米长造价 40 元，两侧墙砌砖，每米长造价 45 元，顶部每平方米造价 20 元，则最低造价需要准备 _____ 元.

15、对函数 $f(x)$ ，若存在区间 $M = [a, b]$ ($a < b$)，使得 $\{y | y = f(x), x \in M\} = M$ ，则称区间 M 为函数 $f(x)$ 的一个“稳定区间”，给出下列四个函数：

(1) $f(x) = e^x$ ，(2) $f(x) = x^3$ ，(3) $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ ，(4) $f(x) = \ln x + 1$ ，

其中存在“稳定区间”的函数有 _____。（把所有可能的函数的序号都填上）

三、解答题

16、已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

17、已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi + x)\cos x - \sqrt{3}$

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

18、某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ $\left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	m	$\frac{\pi}{3}$	n	$\frac{5\pi}{6}$	p
$A\sin(\omega x + \varphi) + k$	1	6	1	-4	1

(1)求出实数 m, n, p 的值;

(2)求出函数 $f(x)$ 的解析式;

(3)将 $y = f(x)$ 图象向左平移 t ($t > 0$) 个单位, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 为偶函数, 求 t 的最小值.

19、已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B + \sin A \sin C = 0$

(1)求角 B 的大小;

(2)给出以下三个条件: 条件①: $a^2 - b^2 + c^2 - 3c = 0$; 条件②: $a = 3$; 条件③: $S_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ 从这三个条件中选择两个条件, 使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 请写出你选择的两个条件并回答下面的问题:

(I) 求 $\sin A$ 的值;

(II) 点 M 为线段 AB 中点, 点 N 为线段 BC 中点, 点 P 为线段 MN 上一个动点, 记 $\lambda = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$, 直接写出 λ 的最大值.

20、已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax$, $g(x) = xe^{x-1} + x\ln x$

(1) 判断函数 $y = g(x)$ 零点的个数，并说明理由；

(2) 对任意的 $x_1 \in (0, 1]$ ，存在 $x_2 \in (0, 1]$ ，使 $f'(x_1) \leq g'(x_2) - 2$ 求实数 a 的取值范围；

(3) 在 (2) 的条件下，证明： $\forall x > 0$ ，有 $g(x) \geq f'(x)$ 。

21、如图， T 是 3 行 3 列的数表，用 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 表示位于第 i 行第 j 列的数，且满足 $a_{ij} \in \{0, 1\}$ 。

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

数表中有公共边的两项称为相邻项，例如上表中 a_{11} 的相邻项仅有 a_{12} 和 a_{21} 。对于数表 T ，定义操作 φ_{ij} 为将该数表中的 a_{ij} 以及 a_{ij} 的相邻项从 x 变为 $1-x$ ，其他项不变，并将操作的结果记为 $\varphi_{ij}(T)$ 。

已知数表 T_0 满足 $a_{ij} = 0, i, j \in \{1, 2, 3\}$ 。记变换 Ψ 为 n 个连续的上述操作，即 $\Psi: \varphi_{i_1 j_1}, \varphi_{i_2 j_2}, \dots, \varphi_{i_n j_n}$ ，使得 $T_1 = \varphi_{i_1 j_1}(T_0), T_2 = \varphi_{i_2 j_2}(T_1), \dots, T_n = \varphi_{i_n j_n}(T_{n-1})$ ，并记 $T_n = \Psi(T_0)$

(1) 给定变换 $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33}$ ，直接写出 $T_3 = \Psi(T_0)$ 。

(2) 若 T' 满足 $a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1$ ，其他项均为 0。 Ψ 是含 n 次操作的变换且有 $T' = \Psi(T_0)$ ，求 n 的最小值。

(3) 若变换 Ψ 中每个操作 φ_{ij} 至多只出现一次，则称变换 Ψ 是一个“优变换”，证明：任给一个数表

$T: (a_{ij}), a_{ij} \in \{0, 1\}, i, j \in \{1, 2, 3\}$ ，存在唯一的一个“优变换” Ψ ，使得 $T = \Psi(T_0)$ 。

参考答案

一、单选题

1、【答案】C;

【解析】 【分析】按照交集的运算法则直接计算即可.

【详解】因为集合 $A = \{x|x \leq 2\}$, $B = [0, 3] = \{x|0 \leq x \leq 3\}$, 所以 $A \cap B = \{x|0 \leq x \leq 2\} = [0, 2]$. 故选: C.

2、【答案】D;

【解析】 【分析】根据余弦函数, 指数函数, 对数函数及幂函数的奇偶性和单调性逐一判断即可. 【详解】

对于 A, 因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$, 故 $f(x) = \cos 2x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是单调递减函数, A 不符合题意; 对

于 B, 函数 $f(x) = e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增函数, 故 B 不符合题意; 对于 C, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$f(x) = \lg|x| = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 不符合题意; 对于 D,

$f(x) = x^{-\frac{2}{3}} = (x^2)^{-\frac{1}{3}}$, $x \in (0, +\infty) \cup (-\infty, 0)$, 因为 $-\frac{2}{3} < 0$, 所以函数 $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

减, 因为 $f(-x) = (x^2)^{-\frac{1}{3}} = f(x)$, 所以 $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ 是偶函数, 故 D 符合题意. 故选: D.

3、【答案】A;

【解析】 【分析】根据正切函数的定义计算. 【详解】由题意, $\tan \alpha = \frac{5}{-12} = -\frac{5}{12}$. 故选: A. 【点睛】

本题考查三角函数的定义, 属于简单题.

4、【答案】B;

【解析】 【分析】由指数函数和对数函数的性质即可得出答案. 【详解】因为 $0 < a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$,

$b = 0.3^{-2} > 0.3^0 = 1$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{3^{-1}} 3 = -1$, 所以 $b > a > c$. 故选: B.

5、【答案】D;

【解析】 【分析】ABC 选项, 可举出反例; D 选项, 利用基本不等式进行求解. 【详解】A 选项, 当

$a = -2, b = -1$ 时, $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{b} = -1$, 故 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, A 错误; B 选项, 当 $a = -2, b = -1$ 时, $b^2 = 1, ab = 2$,

$b^2 < ab$, B 错误; C 选项, 当 $a = -2, b = -1$ 时, $\frac{a+b}{2} = -\frac{3}{2}, \sqrt{ab} = \sqrt{2}$, $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, C 错误; D 选

项, 当 $a < b < 0$ 时, $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$, 由基本不等式可得 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, 即 $a = b$

时, 等号成立, 但 $a \neq b$, 故等号取不到, 故 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$, D 正确. 故选: D

6、【答案】 B;

【解析】 【分析】 根据平均速度的公式计算. 【详解】 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \times 2^2 + 1 - \left(\frac{1}{2} + 1\right)}{2 - 1} = \frac{3}{2}$. 故选: B.

7、【答案】 B;

【解析】 【分析】 根据题意, 化简集合 A, B , 再由充分条件以及必要条件的定义判断即可. 【详解】 因为

$A = \{y | y = 2^x, x < 0\} = (0, 1)$, $B = \left\{x \left| \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \right.\right\} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则 B 是 A 的真子集, 所以“ $x \in A$ ”是

“ $x \in B$ ”成立的必要不充分条件. 故选: B

8、【答案】 C;

【解析】 【分析】 根据导函数的正负即可求解 $y = f(x)$ 的单调性, 即可结合选项逐一求解. 【详解】 由图象可知: 当 $x < -2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \geq -2$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $x = -2$ 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点, $y = f(x)$ 无极大值. 故选: C

9、【答案】 D;

【解析】 【分析】 按照 a 与 1 的大小进行分类讨论, 求出函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最值, 从而可得 a 的值.

【详解】 ①当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是减函数, 在 $(1, 2]$ 上也是减函数. $\because f(0) = a^0 = 1 > -1 - a$, $\therefore$ 函数的最大值为 $f(0) = 1$, 而 $f(2) = -2 + a < a = f(1)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = -2 + a$, $\therefore -2 + a + \frac{5}{2} = 1$, 解得 $a = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, 符合题意. ②当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数, 在 $(1, 2]$ 上是减函数. $\because f(1) = a > -1 + a$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = a$, 而 $f(2) = -2 + a$, $f(0) = a^0 = 1$, 当 $a \in (1, 3)$ 时, $-2 + a < 1$, 此时函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = -2 + a$, 因此有 $-2 + a + \frac{5}{2} = a$, 无解; 当 $a \in [3, +\infty)$ 时, $-2 + a > 1$, 此时函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 1$, 因此有 $1 + \frac{5}{2} = a$, 解得 $a = \frac{7}{2} \in (3, +\infty)$, 符合题意. 综上所述, 实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$. 故选: D

D

10、【答案】 C;

【解析】 【分析】 ①②根据周期性和对称性满足的关系式判断; ③利用换元法求函数 $f(x)$ 在 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 的最值情况.

【详解】 $f(x + 2\pi) = \frac{1}{\sin|x + 2\pi|} + \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\sin|x|} + \frac{1}{\cos x} = f(x)$, 所以 2π 是 $f(x)$ 的一个周期, 故①正确;

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\sin\left|\frac{\pi}{2}-x\right|}+\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\begin{cases}\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}, x \geq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}, x < \frac{\pi}{2}\end{cases} \neq f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 的图象不关于直线}$$

$x=\frac{\pi}{4}$ 对称, 故②错;

$$f(x)=-\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x-\cos x}{1-(\sin x-\cos x)^2}=\frac{2(\sin x-\cos x)}{1-(\sin x-\cos x)^2}, x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \text{ 令}$$

$$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \text{ 则 } x-\frac{\pi}{4} \in\left(-\frac{3 \pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right), t \in\left[-\sqrt{2},-1\right),$$

$$y=\frac{2 t}{1-t^2}=\frac{2}{\frac{1}{t}-t}, \text{ 在 } t \in\left[-\sqrt{2},-1\right) \text{ 上单调递增, 所以无最大值, 即函数 } f(x) \text{ 在 } x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ 上无最大}$$

值, 故③正确. 故选: C.

二、填空题

11、【答案】 $[-2, 1)$;

【解析】 【分析】 根据函数特征直接求定义域即可. 【详解】 由函数 $f(x)=2^x+\sqrt{2+x}+\ln(1-x)$ 可知,

$$\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}, \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \end{cases}, \therefore -2 \leq x < 1, \text{ 所以定义域为 } [-2, 1). \text{ 故答案为: } [-2, 1)$$

12、【答案】 $2; \frac{\pi}{4}$;

【解析】 【分析】 由图知 $\frac{T}{2}=\frac{7 \pi}{8}-\frac{3 \pi}{8}=\frac{\pi}{2}, T=\frac{2 \pi}{\omega}$ 可得 ω 的值, 再由 $\frac{3 \pi}{8} \times 2+\varphi=k \pi(k \in \mathbb{Z})$ 以及

$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ 求得 φ 的值. 【详解】 由 $\frac{T}{2}=\frac{7 \pi}{8}-\frac{3 \pi}{8}=\frac{\pi}{2}$, 可得 $T=\pi$, 所以 $\omega=\frac{2 \pi}{T}=\frac{2 \pi}{\pi}=2$, 此时解析

式为 $y=\sin(2 x+\varphi)$, 由 $\frac{3 \pi}{8} \times 2+\varphi=k \pi(k \in \mathbb{Z})$, 可得 $\varphi=-\frac{3 \pi}{4}+k \pi(k \in \mathbb{Z})$, 又因为 $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 所

以 $k=1, \varphi=\frac{\pi}{4}$, 故答案为: $2; \frac{\pi}{4}$.

13、【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \sqrt{3}$;

【解析】 【分析】 利用三角形中的正弦定理求出角 B, C, 再利用三角形的面积公式求出 $\triangle ABC$ 的面

积. 【详解】 因为 $A=60^{\circ}, AC=2, BC=\sqrt{3}$, 由正弦定理得: $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^{\circ}}=\frac{2}{\sin B},$

$\therefore \sin B = 1, \therefore B = 90^\circ, C = 30^\circ, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14、【答案】 3200;

【解析】 设正面铁栅长为 x ，两侧墙长为 y ，则 $xy = 100$ 于是造价为 $z = 40x + 90y + 20xy$ 则：
 $z = 40x + 90y + 20xy \geq 2\sqrt{40x \cdot 90y} + 20xy = 120\sqrt{xy} + 20xy = 1200 + 2000 = 3200$ ，当且仅当
 $40x = 90y, xy = 100$ 即 $x = 15, y = \frac{20}{3}$ 时取等号本题正确结果： 3200

15、【答案】 ②③;

【解析】 【详解】 因为 $f(x) = e^x$ 单调递增，所以若存在“稳定区间”则 $e^x = x$ 至少有两个解，而 $e^x > x$ 恒成立，所以 $f(x) = e^x$ 不存在“稳定区间”；因为 $f(x) = x^3$ 单调递增，所以若存在“稳定区间”则 $x^3 = x$ 至少有两个解，显然成立，所以 $f(x) = x^3$ 存在“稳定区间”；(3) 因为 $x \in [0, 1], \cos \frac{\pi}{2} x \in [0, 1]$ ，所以 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ 存在“稳定区间”；(4) 因为 $f(x) = \ln x + 1$ 单调递增，所以若存在“稳定区间”则 $\ln x + 1 = x$ 至少有两个解，而 $\ln x + 1 = x$ 只有一解 $x = 1$ ，所以 $f(x) = \ln x + 1$ 不存在“稳定区间”；点睛：判断函数零点(方程的根)所在区间的方法(1)解方程法：当对应方程易解时，可通过解方程确定方程是否有根落在给定区间上。(2)定理法：利用零点存在性定理进行判断。(3)数形结合法：画出相应的函数图象，通过观察图象与 x 轴在给定区间上是否有交点来判断，或者转化为两个函数图象在给定区间上是否有交点来判断。

三、解答题

16、【答案】 (1) $8x - y - 10 = 0$ (2) 递增区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ ，递减区间为 $(-2, 0)$ ，极大值为 $\frac{2}{3}$ ，
 极小值为 $-\frac{2}{3}$.

【解析】 【分析】 (1) 根据题意，求导得 $f'(x)$ ，由导数的几何意义即可得到结果。(2) 根据题意，求导得 $f'(x)$ ，令 $f'(x) = 0$ 即可得到极值点，从而得到结果。【详解】 (1) 因为 $f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 - \frac{2}{3} = 6$ ，
 且 $f'(x) = x^2 + 2x$ ，则 $f'(2) = 2^2 + 2 \times 2 = 8$ ，所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为
 $y - 6 = 8(x - 2)$ ，即 $8x - y - 10 = 0$ 。(2) 因为 $f'(x) = x^2 + 2x$ ，令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = -2$ 或 $x = 0$ ，
 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x \in (-2, 0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递减；
 当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则函数 $f(x)$ 单调递增；所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ ，
 单调递减区间为 $(-2, 0)$ ，当 $x = -2$ 时， $f(x)$ 有极大值为 $f(-2) = \frac{1}{3} \times (-2)^3 + 4 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ，

当 $x=0$ 时, $f(x)$ 有极小值为 $f(0)=-\frac{2}{3}$. 综上所述, 递增区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$, 递减区间为 $(-2, 0)$, 极大值为 $\frac{2}{3}$, 极小值为 $-\frac{2}{3}$.

17、【答案】(1) $f(x)$ 的最小正周期为 π . (2) 最大值为 2, 最小值为 1.

【解析】 【分析】 (1) 先化简 $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi+x)\cos x-\sqrt{3}$, 求出 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, 然后由最小正周期公式求解即可. (2) 求 $f(x)$ 在闭区间上的最大值和最小值即可.

【详解】 (1) $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi+x)\cos x-\sqrt{3}$
 $=2\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}=\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-\sqrt{3}=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, 所以

以 $f(x)$ 的最小正周期为: $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. (2) 由 (1) 可知, $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $x\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. 所以当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)_{\max}=2$, 当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\min}=1$. 所以当

$x\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ 的最大值为 2, 最小值为 1.

18、【答案】(1) $m=\frac{\pi}{12}$, $n=\frac{7\pi}{12}$, $p=\frac{13\pi}{12}$ (2) $f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ (3) $\frac{\pi}{3}$;

【解析】 【分析】 (1) 根据表格列方程, 解方程得到 m, n, p ; (2) 根据表格得到 $\begin{cases} A\sin 0+k=1 \\ A\sin \frac{\pi}{2}+k=6 \end{cases}$,

解方程得到 $\begin{cases} A=5 \\ k=1 \end{cases}$, 然后结合 (1) 中结论即可得到 $f(x)$ 的解析式; (3) 根据图象的平移变换得到 $g(x)$,

根据 $g(x)$ 为偶函数得到 $g(0)$ 为最值, 然后解方程求 t 即可. 【详解】 (1) 由题意得 $\begin{cases} \omega m+\varphi=0 \\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2} \\ \omega n+\varphi=\pi \\ \frac{5\pi}{6}\omega+\varphi=\frac{3\pi}{2} \\ \omega p+\varphi=2\pi \end{cases}$, 解

$$\text{得} \begin{cases} \omega = 2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} \\ m = \frac{\pi}{12} \\ n = \frac{7\pi}{12} \\ p = \frac{13\pi}{12} \end{cases}, \text{ 所以 } m = \frac{\pi}{12}, n = \frac{7\pi}{12}, p = \frac{13\pi}{12}. \quad (2) \text{ 由题意得 } \begin{cases} A \sin 0 + k = 1 \\ A \sin \frac{\pi}{2} + k = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} A = 5 \\ k = 1 \end{cases}, \text{ 所以}$$

$$f(x) = 5 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 1. \quad (3) \text{ 由题意得 } g(x) = 5 \sin \left(2x + 2t - \frac{\pi}{6} \right) + 1, \text{ 因为 } g(x) \text{ 为偶函数, 所以}$$

$$g(0) = 5 \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) + 1 = 6 \text{ 或 } g(0) = -4, \text{ 即 } \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) = \pm 1, \text{ 即 } 2t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得}$$

$$t = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 因为 } t > 0, \text{ 所以当 } k = 0 \text{ 时, } t \text{ 最小, 最小为 } \frac{\pi}{3}.$$

$$19. \text{【答案】} (1) B = \frac{2\pi}{3} \quad (2) \text{ (I) 见解析; (II) } -6;$$

【解析】 【分析】 (1) 由正弦定理和余弦定理得到 $\cos B = -\frac{1}{2}$, 得到 $B = \frac{2\pi}{3}$; (2) (I) 选择①②和①③

求出边长均不合要求, 选择②③, 得到 $\triangle ABC$ 存在且唯一, 并求出 $c = 5, b = 7$, 得到 $\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$; (II)

取 AC 的中点 H , 推出 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PH}|^2 - |\overrightarrow{CH}|^2$, 并得到点 P 与 N 重合时, $|\overrightarrow{PH}|$ 最大值为 $\frac{5}{2}$, 并求出

λ 的最大值. 【详解】 (1) $\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B + \sin A \sin C = 0$, 由正弦定理得 $a^2 + c^2 - b^2 + ac = 0$,

故 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{-ac}{2ac} = -\frac{1}{2}$, 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3}$, (2) (I) 选择①②,

$\begin{cases} a^2 + c^2 - b^2 + ac = 0 \\ a^2 - b^2 + c^2 - 3c = 0 \end{cases}$, 解得 $ac + 3c = 0$, 又 $a = 3$, 所以 $6c = 0$, 解得 $c = 0$, 此时 $\triangle ABC$ 不存在, 选

择①③, $\begin{cases} a^2 + c^2 - b^2 + ac = 0 \\ a^2 - b^2 + c^2 - 3c = 0 \end{cases}$, 解得 $ac + 3c = 0$, 又 $c > 0$, 故 $a = -3$, 不合要求, 此时 $\triangle ABC$ 不存在,

选择②③, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, 即 $\frac{1}{2} \times 3c \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, 解得 $c = 5$, 又 $a = 3$,

$a^2 + c^2 - b^2 + ac = 0$, 故 $9 + 25 - b^2 + 15 = 0$, 解得 $b = 7$, 由于 $3 + 5 > 7$, 故满足 $\triangle ABC$ 存在且唯一,

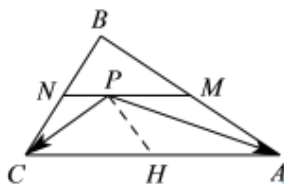
由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{3}{\sin A} = \frac{7}{\sin \frac{2\pi}{3}}$, 解得 $\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, (II) 取 AC 的中点 H , 连接 PH ,

则 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CH}$, 两式平方后相减得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PH}|^2 - |\overrightarrow{CH}|^2$, 其中 $|\overrightarrow{CH}| = \frac{7}{2}$,

当点 P 与 M 重合或与 N 重合时, $|\overrightarrow{PH}|$ 最大, 当点 P 与 M 重合时, $|\overrightarrow{PH}| = \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}$, 当点 P 与 N 重合

时, $|\overrightarrow{PH}| = \frac{1}{2}c = \frac{5}{2}$, 故 $|\overrightarrow{PH}|$ 最大值为 $|\overrightarrow{PH}| = \frac{5}{2}$, 故 $\lambda = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PH}|^2 - |\overrightarrow{CH}|^2$ 最大值为

$$\frac{25}{4} - \frac{49}{4} = -6.$$



20、【答案】(1)1个(2) $(-\infty, -1]$ (3)证明见解析;

【解析】 【分析】(1) 先求定义域, 转变为求 $k(x) = e^{x-1} + \ln x$ 的零点个数, 求导, 根据单调性与零点的存在性定理即可求; (2) 任意的 $x_1 \in (0, 1]$, 存在 $x_2 \in (0, 1]$, 使 $f'(x_1) \leq g'(x_2) - 2$, 可转化为 $f'(x_1)_{\max} \leq g'(x_2)_{\max} - 2$, 则求出 $f'(x_1)_{\max}$, $g'(x_2)_{\max}$ 即可求出实数 a 的取值范围; (3) 指对缩放不等式可知 $e^{x-1} \geq (x-1) + 1 = x$, $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ (需证明), 则可得 $xe^{x-1} + x \ln x \geq x^2 + x - 1$, 则不等式可证. 【详

解】(1) 由 $g(x) = xe^{x-1} + x \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, $y = g(x)$ 的零点等价于 $k(x) = e^{x-1} + \ln x$ 的零点,

$k'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$, 所以 $y = k(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $k(1) = 1 > 0$, $k\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}-1} - 1 < 0$, 所以

$y = k(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上只有一个零点, 所以 $y = k(x)$ 的零点个数为 1 个, 则 $y = g(x)$ 的零点个数也为 1 个.

(2) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax$, 所以 $f'(x) = x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$, 所以 $f'(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递增, 故 $f'(x)_{\max} = f'(1) = a + 2$. 因为 $g(x) = xe^{x-1} + x \ln x$, 所以

$g'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} + \ln x + 1 = (x+1)e^{x-1} + \ln x + 1$. 令 $h(x) = (x+1)e^{x-1} + \ln x + 1$, 则

$h'(x) = (x+2)e^{x-1} + \frac{1}{x}$, 又 $x \in (0, 1]$, 所以 $h'(x) > 0$, 故 $g'(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递增, 所以

$g'(x)_{\max} = g'(1) = 3$. 又对任意的 $x_1 \in (0, 1]$, 存在 $x_2 \in (0, 1]$, 使 $f'(x_1) \leq g'(x_2) - 2$, 所以 $f'(x)_{\max} \leq g'(x)_{\max} - 2$, 即 $a + 2 \leq 3 - 2$, 解得 $a \leq -1$, 故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$. (3) 令

$s(x) = e^{x-1} - x$, $x > 0$, 则 $s'(x) = e^{x-1} - 1$. 令 $s'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $s'(x) < 0$,

$s(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $s'(x) > 0$, $s(x)$ 单调递增, 所以 $s(x) \geq s(1) = 0$, 即 $e^{x-1} \geq x$ (当

且仅当 $x=1$ 时，等号成立）。令 $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ ，则 $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ 。令 $F'(x) = 0$ ，解得 $x=1$ ，则当 $x \in (0,1)$ 时， $F'(x) < 0$ ， $F(x)$ 单调递减；当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 单调递增，所以 $F(x) \geq F(1) = 0$ ，即 $\ln x \geq -\frac{1}{x} + 1$ （当且仅当 $x=1$ 时，等号成立），故 $e^{x-1} + \ln x \geq x - \frac{1}{x} + 1$ （当且仅当 $x=1$ 时，等号成立）。又 $x > 0$ ，所以 $xe^{x-1} + x \ln x \geq x^2 + x - 1$ 。因为 $a \leq -1$ ，所以 $x^2 + x - 1 \geq x^2 + x + a$ ，故 $xe^{x-1} + x \ln x \geq x^2 + x + a$ ，即 $g(x) \geq f'(x)$ 。

1	0	0
0	1	0
0	0	1

21、【答案】(1)

1	0	0
0	1	0
0	0	1

 (2) n 的最小值为 3；(3) 证明过程见解析；

【解析】 【分析】(1) 按照题意进行求解即可；(2) 先得到 T' ，分析得到 T' 的对称性和奇偶性质，当 $n=1$ ， $n=2$ 时，不满足要求， $n=3$ 时，取变换 $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}$ ，得到答案；(3) 设 A 是所有优变换的集合， B 是所有数表的集合，构造 $f: A \rightarrow B$ ，证明 A 中的优变换和 B 中数表为一一对应关系，证明出数表中的数据都可通过变换单独被改变，从而证明出结论。

【详解】(1) T_0 为

0	0	0
0	0	0
0	0	0

$T_1 = \varphi_{11}(T_0)$ ，故 T_1 为

1	1	0
1	0	0
0	0	0

$T_2 = \varphi_{22}(T_1)$ ，故 T_2 为

1	0	0
0	1	1
0	1	0

$T_3 = \varphi_{33}(T_2)$ ，故 $T_3 = \Psi(T_0)$ 为

1	0	0
0	1	0
0	0	1

(2) T' 为

0	1	0
1	1	1
0	0	0

由题意得，

$\varphi_{11}, \varphi_{13}, \varphi_{22}, \varphi_{31}, \varphi_{33}$ 均改变了表格中的奇数个数据，定义为奇操作，

$\varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{23}, \varphi_{32}$ 均改变了表格中的偶数个数据，定义为偶操作，

两次同样的操作，表格中数据不变，例如 $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{11}$ 不改变表格中数据，故 n 的最大值为 9，且变换满足交

换律，例如 $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{12}$ 和 $\Psi: \varphi_{12}, \varphi_{11}$ ，结果相同，

观察到 T' 是关于 $\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}$ 变换所在直线对称的，故变换也要关于这条直线轴对称，

T' 中有 4 个 1，故相对于 T_0 改变了 4 个数，

若 $n=1$ ，通过验证，发现不能得到 T' ，

若 $n=2$ ，结合对称性和奇偶性，有 $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{13}$ ， $\Psi: \varphi_{21}, \varphi_{23}$ ， $\Psi: \varphi_{31}, \varphi_{33}$ ， $\Psi: \varphi_{12}, \varphi_{32}$ 四种变换，经过验证，均不满足，

若 $n=3$ ，结合对称性和奇偶性，不妨取变换 $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}$ ，

$T_1 = \varphi_{11}(T_0)$ ，故 T_1 为

1	1	0
1	0	0
0	0	0

$T_2 = \varphi_{12}(T_1)$ ，故 T_2 为

0	0	1
1	1	0
0	0	0

$T_3 = \varphi_{13}(T_2)$ ，故 $T_3 = \Psi(T_0)$ 为

0	1	0
1	1	1
0	0	0

故 n 的最小值为 3；

(3) 设 A 是所有优变换的集合，则 A 中的优变换的个数为 2^9 ， B 是所有数表的集合，则 B 中的数表的个数为 2^9 ，构造 $f: A \rightarrow B$ ，

下面证明 A 中的优变换和 B 中数表为一一对应关系，

由于 A, B 中元素个数相同，要证每种变换都能等价变换为唯一的优变换，

只需证每个数表都能通过变换得到，由 (2) 可知， $\Psi: \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{22}$ 可以得到以下数表，

0	0	0
0	0	0
0	1	0

由对称性可知， $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$ 可以单独被改变，又经过 $\Psi: \varphi_{11}$ 变换得到

1	1	0
1	0	0
0	0	0

又 a_{12}, a_{21} 可单独被改变，故可得到

1	0	0
0	0	0
0	0	0

即 a_{11} 可单独被改变，同理经过变换 a_{13}, a_{31}, a_{33} 可单独被改变，经过 $\Psi: \varphi_{22}$ 变换得到：

0	1	0
1	1	1
0	1	0

又经过变换， $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$ 可单独被改变，可得到

0	0	0
0	1	0
0	0	0

故任给一个数表 $T: (a_{ij}), a_{ij} \in \{0, 1\}, i, j \in \{1, 2, 3\}$ ，存在唯一的一个“优变换” Ψ ，使得 $T = \Psi(T_0)$ 。

【点睛】新定义问题，要充分发掘题目中信息，将复杂问题抽丝剥茧，化难为简。（1）可通过举例子的方式，将抽象的定义转化为具体的简单的应用，从而加深对信息的理解；（2）可用自己的语言转述新信息所表达的内容，如果能清晰描述，那么说明对此信息理解的较为透彻；（3）发现新信息与所学知识的联系，并从描述中体会信息的本质特征与规律；（4）如果新信息是课本知识的推广，则关注此信息与课本中概念的不同之处，以及什么情况下可以使用书上的概念。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



微信搜一搜



京考一点通