

# 2020 北京石景山高三（上）期末

## 数 学

本试卷共 5 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

### 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ ，则  $A \cap B =$

- A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{0, 2\}$       C.  $\{-1, 3\}$       D.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 复数  $z = \frac{2}{1+i}$  的共轭复数在复平面内对应的点所在象限为

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3. 下列函数中既是奇函数，又在区间  $(0, 1)$  上单调递减的是

- A.  $f(x) = x^3$       B.  $f(x) = \lg |x|$       C.  $f(x) = -x$       D.  $f(x) = \cos x$

4. 已知向量  $\mathbf{a} = (5, m)$ ， $\mathbf{b} = (2, -2)$ ，若  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ ，则实数  $m =$

- A. -1      B. 1      C. 2      D. -2

5. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米

1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为

- A. 134 石      B. 169 石      C. 338 石      D. 1365 石

6. 已知  $a = \log_3 4$ ， $b = \log_\pi 3$ ， $c = \sqrt{5}$ ，则  $a, b, c$  的大小关系是

- A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $b < c < a$       D.  $b < a < c$

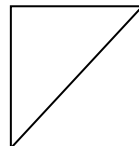
7. 艺术体操比赛共有 7 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，

从 7 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 5 个有效评分。5 个有效评分与 7 个原始评分相比，不变的数字特征是

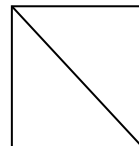
- A. 中位数      B. 平均数      C. 方差      D. 极差

8. 一个正方体被一个平面截去一部分，  
剩余部分的三视图如右图，则截去部分  
体积与原正方体体积的比值为

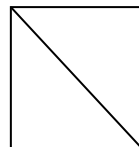
- A.  $\frac{1}{8}$



主(正)视图



左(侧)视图



俯视图

- B.  $\frac{1}{7}$   
C.  $\frac{1}{6}$   
D.  $\frac{1}{5}$

9. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 设  $k, l, p, r \in \mathbf{N}^*$ , 则  $k+l > p+r$  是  $a_k + a_l > a_p + a_r$  的

- A. 充分而不必要条件  
B. 必要而不充分条件  
C. 充要必要条件  
D. 既不充分也不必要条件

10. 关于曲线  $C: x^2 + xy + y^2 = 4$ . 给出下列三个结论:

- ① 曲线  $C$  恰好经过 6 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);  
② 曲线  $C$  上任意一点到原点的距离都不大于  $2\sqrt{2}$ ;  
③ 曲线  $C$  上任意一点到原点的距离都不小于 2.

其中, 正确结论的个数是

- A. 0  
B. 1  
C. 2  
D. 3

## 第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 在  $(x - \frac{2}{x})^6$  的二项展开式中, 常数项等于\_\_\_\_\_. (用数字作答)

12. 已知双曲线标准方程为  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ , 则其焦点到渐近线的距离为\_\_\_\_\_.

13. 已知数列  $\{a_n + n\} (n \in \mathbf{N}^*)$  为等比数列,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 则  $a_3 =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知平面  $\alpha, \beta, \gamma$ . 给出下列三个论断: ①  $\alpha \perp \beta$ ; ②  $\alpha \perp \gamma$ ; ③  $\beta \parallel \gamma$ . 以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: \_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ . 已知  $b - c = \frac{1}{4}a$ ,

$2\sin B = 3\sin C$ , 则  $\cos A$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 已知向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  是平面  $\alpha$  内的一组基向量,  $O$  为  $\alpha$  内的定点, 对于  $\alpha$  内任意

一点  $P$ , 当  $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  时, 则称有序实数对  $(x, y)$  为点  $P$  的广义坐标, 若点  $A, B$  的广义坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 对于下列命题:

① 线段  $AB$  的中点的广义坐标为  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ;

② 向量  $\overrightarrow{OA}$  平行于向量  $\overrightarrow{OB}$  的充要条件是  $x_1y_2 = x_2y_1$ ;

③ 向量  $\overrightarrow{OA}$  垂直于向量  $\overrightarrow{OB}$  的充要条件是  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ .

其中, 真命题是\_\_\_\_\_. (请写出所有真命题的序号)

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$ .

(I) 若  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 且  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , 求  $f(\alpha)$  的值;

(II) 求函数  $f(x)$  的最小正周期, 及函数  $f(x)$  的单调递减区间.

18. (本小题 13 分)

一款小游戏的规则如下: 每盘游戏都需抛掷骰子三次, 出现一次或两次“6 点”获得 15 分, 出现三次“6 点”获得 120 分, 没有出现“6 点”则扣除 12 分(即获得 -12 分).

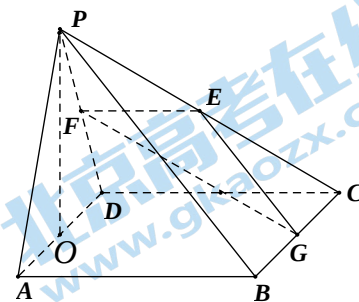
(I) 设每盘游戏中出现“6 点”的次数为  $X$ , 求  $X$  的分布列;

(II) 玩两盘游戏, 求两盘中至少有一盘获得 15 分的概率;

(III) 玩过这款游戏的许多人发现, 若干盘游戏后, 与最初的分数相比, 分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析解释上述现象.

19. (本小题 14 分)

已知在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是边长为4的正方形， $\triangle PAD$  是正三角形， $CD \perp$  平面  $PAD$ ， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $O$  分别是  $PC$ 、 $PD$ 、 $BC$ 、 $AD$  的中点。



(I) 求证： $PO \perp$  平面  $ABCD$ ；

(II) 求平面  $EFG$  与平面  $ABCD$  所成锐二面角的大小；

(III) 线段  $PA$  上是否存在点  $M$ ，使得直线  $GM$  与平面  $EFG$  所成角为  $\frac{\pi}{6}$ ，若存在，求线段  $PM$  的长度；若不存在，说明理由。

20. (本小题 14 分)

已知函数  $f(x) = e^x - ax$ . ( $a \in \mathbf{R}$ )

(I) 求函数  $f(x)$  的单调区间；

(II) 若  $a = 3$ ， $f(x)$  的图象与  $y$  轴交于点  $A$ ，求  $y = f(x)$  在点  $A$  处的切线方程；

(III) 在 (II) 的条件下，证明：当  $x > 0$  时， $f(x) > x^2 - 3x + 1$  恒成立。

21. (本小题 13 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1$  过点  $P(2,1)$ 。

(I) 求椭圆  $C$  的方程，并求其离心率；

(II) 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线  $l$ ，设点  $A$  为第四象限内一点且在椭圆  $C$  上 (点  $A$  不在直线  $l$  上)，直线  $PA$  关于  $l$  的对称直线  $PB$  与椭圆交于另一点  $B$ 。设  $O$  为坐标原点，判断直线  $AB$  与直线  $OP$  的位置关系，并说明理由。

22. (本小题 13 分)

已知由  $n (n \in \mathbf{N}^*)$  个正整数构成的集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 3)$ ,

记  $S_A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , 对于任意不大于  $S_A$  的正整数  $m$ , 均存在集合  $A$  的一个子集, 使得该子集的所有元素之和等于  $m$ .

(I) 求  $a_1, a_2$  的值;

(II) 求证: “ $a_1, a_2, \dots, a_n$  成等差数列” 的充要条件是 “ $S_A = \frac{n(n+1)}{2}$ ”;

(III) 若  $S_A = 2020$ , 求  $n$  的最小值, 并指出  $n$  取最小值时  $a_n$  的最大值.