北京市朝阳区 2017～2018 学年度第一学期高三年级期中统一考试

数学试卷(理工类)

2017. 11

(考试时间 120 分钟　满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x>1\}$, $B=\{x|\log_2 x>1\}$, 则 $A\cap B=$

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$　　C. $\{x|x>2\}$　　D. $\{x|x>0\}$

2. 已知实数 x,y 满足条件 $\begin{cases} x\geq 2, \\ y\geq 2, \\ x+y\leq 6, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

3. 要得到函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象,只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点

A. 先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,再将横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变

B. 先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标不变

C. 先将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标不变,再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 先将横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

4. 已知非零平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, "$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$" 是"存在非零实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和,且 $S_5>S_6>S_4$,以下四个命题:

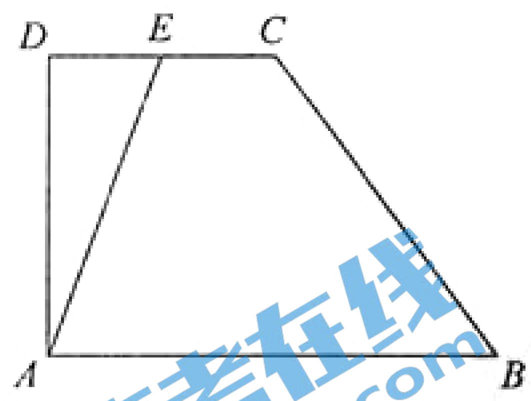
① 数列 $\{S_n\}$ 中的最大项为 S_{10}　　② 数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$

③ $S_{10}>0$　　④ $S_{11}<0$

其中正确的序号是

A. ②③　　B. ②③④　　C. ②④　　D. ①③④

6. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AD \perp DC$，E 是 CD 的中点，$DC = 1$，$AB = 2$，则 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB} =$



A. $\sqrt{5}$　　　　B. $-\sqrt{5}$

C. 1　　　　D. -1

7. 袋子里有编号为 2，3，4，5，6 的五个球，某位教师从袋中任取两个不同的球．教师把所取两球编号的和只告诉甲，其乘积只告诉乙，再让甲、乙分别推断这两个球的编号．

甲说："我无法确定．"

乙说："我也无法确定．"

甲听完乙的回答以后，甲说："我现在可以确定两个球的编号了．"

根据以上信息，你可以推断出抽取的两球中

A. 一定有 3 号球　　　　B. 一定没有 3 号球

C. 可能有 5 号球　　　　D. 可能有 6 号球

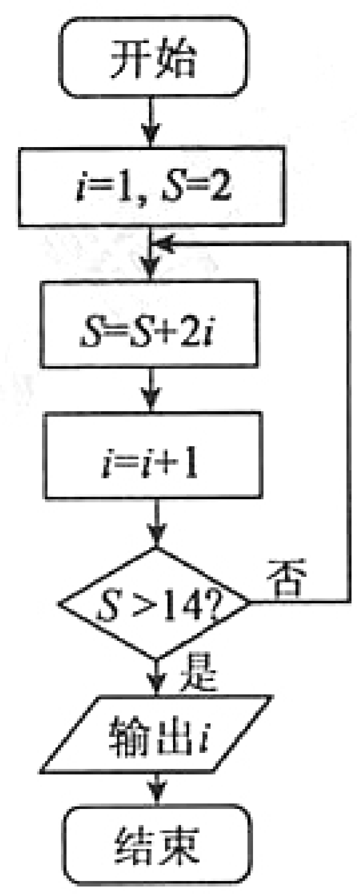
8. 已知函数 $f(x) = \sin(\cos x) - x$ 与函数 $g(x) = \cos(\sin x) - x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内都为减函数，设 $x_1, x_2, x_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$，且 $\cos x_1 = x_1$，$\sin(\cos x_2) = x_2$，$\cos(\sin x_3) = x_3$，则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是

A. $x_1 < x_2 < x_3$　　B. $x_3 < x_1 < x_2$　　C. $x_2 < x_1 < x_3$　　D. $x_2 < x_3 < x_1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 执行如下图所示的程序框图，则输出 i 的值为________．



10. 已知 $x > 1$，且 $x - y = 1$，则 $x + \frac{1}{y}$ 的最小值是________．

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的图象与直线 $y = kx$ 有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围为________．

12. 已知函数$f(x)$同时满足以下条件：

① 定义域为$\mathbf{R}$；

② 值域为$[0,1]$；

③ $f(x)-f(-x)=0$.

试写出一个函数$f(x)$的解析式________.

13. 某罐头生产厂计划制造一种圆柱形的密封铁皮罐头盒，其表面积为定值S. 若罐头盒的底面半径为r，则罐头盒的体积V与r的函数关系式为________；当$r=$________时，罐头盒的体积最大.

14. 将集合$M=\{1,2,3,\cdots,15\}$表示为它的5个三元子集（三元集：含三个元素的集合）的并集，并且每个三元子集的元素之和都相等，则每个三元集的元素之和为________；请写出满足上述条件的集合M的5个三元子集________.（只写出一组）

三、解答题：本大题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分13分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

16.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=2\sin x\cos(x-\frac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，求函数$f(x)$的取值范围.

17.（本小题满分13分）

在$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{4}$，$\frac{c}{b}=\frac{3\sqrt{2}}{7}$.

（Ⅰ）试求$\tan C$的值；

（Ⅱ）若$a=5$，试求$\triangle ABC$的面积.

18.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-ax+a)e^{-x}$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)$，其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数. 判断 $g(x)$ 在定义域内是否为单调函数，并说明理由.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^x}-\ln x-\dfrac{2}{ex}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：$\ln x\geqslant-\dfrac{1}{ex}$；

（Ⅲ）判断曲线 $y=f(x)$ 是否位于 x 轴下方，并说明理由.

20.（本小题满分 13 分）

数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正整数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，且同时满足以下两个条件：

① $a_1=1$；② 当 $n\geqslant2$ 时，$|a_i-a_{i+1}|\leqslant2$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$.

记这样的数列个数为 $f(n)$.

（Ⅰ）写出 $f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ 的值；

（Ⅱ）证明 $f(2018)$ 不能被 4 整除.

北京市朝阳区 2017-2018 学年度第一学期高三年级期中统一考试

数学学科参考答案（理工类） 2017.11

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	A	B	D	D	C

二、填空题：

9. 5　　　　10. 3　　　　11. $[\sqrt{2},2)$

12. $f(x)=|\sin x|$ 或 $\dfrac{\cos x+1}{2}$ 或 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le 1,\\ 0, & x>1 \text{或} x<-1.\end{cases}$ （答案不唯一）

13. $V=\dfrac{1}{2}Sr-\pi r^3(0<r<\dfrac{\sqrt{2\pi S}}{2\pi})$； $\dfrac{\sqrt{6\pi S}}{6\pi}$

14. 24; $\{1,8,15\}$，$\{3,7,14\}$，$\{5,6,13\}$，$\{2,10,12\}$，$\{4,9,11\}$（答案不唯一）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $n=1$ 时，$a_1=1$．

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列．

故 $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$． ------- 8 分

（Ⅱ）由已知得 $b_n=\log_{\frac{1}{2}}a_n=\log_{\frac{1}{2}}2^{n-1}=1-n$．

因为 $b_n-b_{n-1}=(1-n)-(2-n)=-1$，

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 0，公差为 -1 的等差数列．

故 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\dfrac{n(1-n)}{2}$． ------- 13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：因为 $f(x)=2\sin x\cdot\cos(x-\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)=2\sin x\cdot(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3})$

$$=\sin x\cdot\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$． ------- 8 分

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$．

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$．

所以 $f(x)\in[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$． ------- 13 分

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $A=\frac{\pi}{4}$，$\frac{c}{b}=\frac{3\sqrt{2}}{7}$，所以 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin(\frac{3\pi}{4}-C)}=\frac{3\sqrt{2}}{7}$.

所以 $7\sin C=3\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-C)$.

所以 $7\sin C=3\sqrt{2}(\sin\frac{3\pi}{4}\cos C-\cos\frac{3\pi}{4}\sin C)$.

所以 $7\sin C=3\cos C+3\sin C$.

所以 $4\sin C=3\cos C$.

所以 $\tan C=\frac{3}{4}$. ------- 7 分

（Ⅱ）因为 $a=5$，$A=\frac{\pi}{4}$，$\frac{c}{b}=\frac{3\sqrt{2}}{7}$，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得

$$25=b^2+(\frac{3\sqrt{2}}{7}b)^2-2b\cdot\frac{3\sqrt{2}}{7}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $b=7$，$c=3\sqrt{2}$.

所以△ ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{21}{2}$. ------- 13 分

18. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}\}$. $f'(x)=-(x-2)(x-a)e^{-x}$.

① 当 $a<2$ 时，令 $f'(x)<0$，解得：$x<a$ 或 $x>2$，$f(x)$ 为减函数；

令 $f'(x)>0$，解得：$a<x<2$，$f(x)$ 为增函数.

② 当 $a=2$ 时，$f'(x)=-(x-2)^2e^{-x}\leq 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 为减函数；

③ 当 $a>2$ 时，令 $f'(x)<0$，解得：$x<2$ 或 $x>a$，函数 $f(x)$ 为减函数；

令 $f'(x)>0$，解得：$2<x<a$，函数 $f(x)$ 为增函数.

综上，

当 $a<2$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,a),(2,+\infty)$；单调递增区间为 $(a,2)$；

当 $a=2$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,2),(a,+\infty)$；单调递增区间为 $(2,a)$.

-------- 8 分

（Ⅱ）$g(x)$ 在定义域内不为单调函数，以下说明：

$g'(x)=f''(x)=[x^2-(a+4)x+3a+2]\cdot e^{-x}$.

记 $h(x)=x^2-(a+4)x+3a+2$，则函数 $h(x)$ 为开口向上的二次函数.

方程 $h(x)=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4a+8=(a-2)^2+4>0$ 恒成立.

所以，$h(x)$ 有正有负. 从而 $g'(x)$ 有正有负.

故 $g(x)$ 在定义域内不为单调函数. -------- 14 分

19. （本小题满分 14 分）

解：函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x}+\frac{2}{ex^2}$

（Ⅰ）$f'(1)=\frac{1}{e}-1$，又 $f(1)=-\frac{1}{e}$，

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为

$y+\frac{1}{e}=(\frac{1}{e}-1)x-\frac{1}{e}+1$.

即 $(\frac{1}{e}-1)x-y-\frac{2}{e}+1=0$.　　　　　　　　　　　　　　------ 4分

（Ⅱ）"要证明 $\ln x\geq-\frac{1}{ex},(x>0)$" 等价于 "$x\ln x\geq-\frac{1}{e}$".

设函数 $g(x)=x\ln x$.

令 $g'(x)=1+\ln x=0$，解得 $x=\frac{1}{e}$.

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	□	$-\frac{1}{e}$	□

因此，函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$. 故 $x\ln x\geq-\frac{1}{e}$.

即 $\ln x\geq-\frac{1}{ex}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　------- 9 分

（Ⅲ）曲线 $y=f(x)$ 位于 x 轴下方. 理由如下：

由（Ⅱ）可知 $\ln x\geq-\frac{1}{ex}$，所以 $f(x)\leq\frac{1}{e^x}-\frac{1}{ex}=\frac{1}{x}(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e})$.

设 $k(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e}$，则 $k'(x)=\frac{1-x}{e^x}$.

令 $k'(x)>0$ 得 $0<x<1$；令 $k'(x)<0$ 得 $x>1$.

所以 $k(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，$(1,+\infty)$ 上为减函数.

所以当 $x>0$ 时，$k(x)\leq k(1)=0$ 恒成立，当且仅当 $x=1$ 时，$k(1)=0$.

又因为 $f(1)=-\frac{1}{e}<0$，　所以 $f(x)<0$ 恒成立.

故曲线 $y=f(x)$ 位于 x 轴下方.　　　　　　　　　　　　　　　　------- 14 分

20.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：$f(2)=1,f(3)=2,f(4)=4$.　　　　　　　　　　　　　　------- 3 分

（Ⅱ）证明：把满足条件①②的数列称为 n 项的首项最小数列.

对于 n 个数的首项最小数列，由于 $a_1=1$，故 $a_2=2$ 或 3.

（1）若 $a_2=2$，则 $a_2-1,a_3-1,\cdots,a_n-1$ 构成 $n-1$ 项的首项最小数列，其个数为 $f(n-1)$；

（2）若 $a_2=3,a_3=2$，则必有 $a_4=4$，故 $a_4-3,a_5-3,\cdots,a_n-3$ 构成 $n-3$ 项的首项最小数列，其个数为 $f(n-3)$；

（3）若 $a_2=3$，则 $a_3=4$ 或 $a_3=5$．设 a_{k+1} 是这数列中第一个出现的偶数，则前 k 项应该是 $1,3,\cdots,2k-1$，a_{k+1} 是 $2k$ 或 $2k-2$，即 a_k 与 a_{k+1} 是相邻整数.

由条件②，这数列在 a_{k+1} 后的各项要么都小于它，要么都大于它，因为 2 在 a_{k+1} 之后，故 a_{k+1} 后的各项都小于它.

这种情况的数列只有一个，即先排递增的奇数，后排递减的偶数.

综上，有递推关系：$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1$，$n\geq 5$.

由此递推关系和（I）可得，$f(2),f(3),\cdots,f(2018)$ 各数被 4 除的余数依次为：

1，1，2，0，2，1，2，1，3，2，0，0，3，0，1，1，2，0，…

它们构成 14 为周期的数列，又 $2018=14\times 144+2$，

所以 $f(2018)$ 被 4 除的余数与 $f(2)$ 被 4 除的余数相同，都是 1，

故 $f(2018)$ 不能被 4 整除.　　　　------- 13 分