2023 北京大兴一中高二 10 月月考

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知点 M 在平面 ABC 内，并且对空间任一点 O，$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则 $x=$（　）

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

2. 给出下列命题，其中说法正确的是（　）

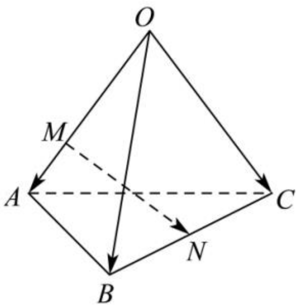
A. 若 A，B 为两个随机事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

B.若事件 A，B，C 两两互斥，则 $P(A)+P(B)+P(C)=1$

C. 若 A，B 为互斥事件，则 $P(A)+P(B)\le 1$

D. 若 $A\subseteq B$，则 $P(A)<P(B)$

3. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$．点 M 在 OA 上，且 $\boldsymbol{OM}=2\boldsymbol{MA}$, $\boldsymbol{N}$ 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　）



A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

4. 一袋中装有大小相同，编号分别为1、2、3、4、5、6、7、8 的八个球，从中有放回地每次取一个球，共取 2 次，则取得两个球的编号和不小于15 的概率为（　）

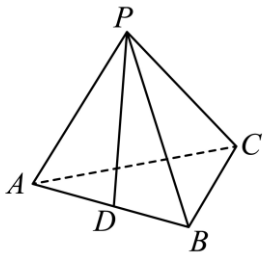
A. $\frac{3}{56}$　　B. $\frac{3}{64}$　　C. $\frac{3}{32}$　　D. $\frac{3}{18}$

5. 先后两次掷一枚质地均匀的骰子，事件 $A=$“两次掷出的点数之和是 6”，事件 $B=$“第一次掷出的点数是奇数”，事件 $C=$“两次掷出的点数相同”，则（　）

A. A 与 B 互斥　　B. B 与 C 相互独立

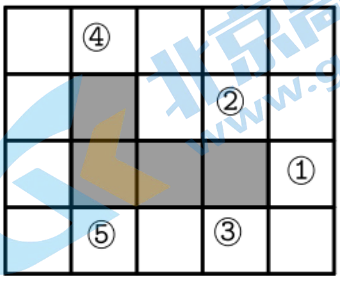
C. $P(A)=\frac{1}{6}$　　D. A 与 C 互斥

6. 在正四面体 $P-ABC$ 中，棱长为 1，且 D 为棱 AB 的中点，则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的值为（　）.



A. $-\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. 如图，在方格纸中，随机选择标有序号①②③④⑤中的一个小正方形涂黑，与图中阴影部分构成轴对称图形的概率是（　）



A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

8. 已知点 $A(2,1,0)$，$B(1,3,0)$，$C(-2,-1,1)$，$D(2,3,1)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影向量的模为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 已知 $\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-1,4,2)$，$\vec{c}=(-3,5,x)$，若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三向量共面，则实数 $x=$（　）.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

10. 已知 $x,y,z\in \mathrm{N}^{*}$，且 $x+y+z=10$，记 ξ 为 x，y，z 中的最大值，$P(\xi=7)=$（　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

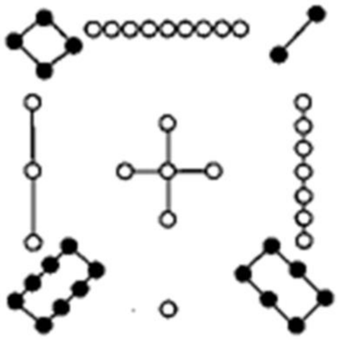
11. 从甲、乙、丙、丁四个人中任选两名志愿者，则甲被选中的概率是________.

12. 与向量 $(-3,-4,5)$ 共线的单位向量是________________________________.

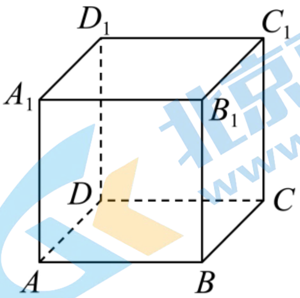
13. 已知向量 $\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(-1,1,x)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，则 $|\vec{a}+3\vec{b}|=$__________.

14. 洛书，古称龟书，是阴阳五行术数之源．在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上心有此图象，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四隅黑点为阴数，其各行各

列及对角线点数之和皆为 15．如图，则甲壳上所有阴阳数之和__________；若从五个阳数中随机抽取三个数，则能使得这三个数之和等于 15 概率是__________.



15. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP\perp$ 平面 MBD_1.



（Ⅰ）当点 M 与点 C 重合时，线段 AP 的长度为_______；

（Ⅱ）线段 AP 长度的最小值为_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 甲、乙两人参加普法知识竞赛，共有 5 题，选择题 3 个，判断题 2 个，甲、乙两人各抽一题.

（1）甲、乙两人中有一个抽到选择题，另一个抽到判断题的概率是多少？

（2）甲、乙两人中至少有一人抽到选择题的概率是多少？

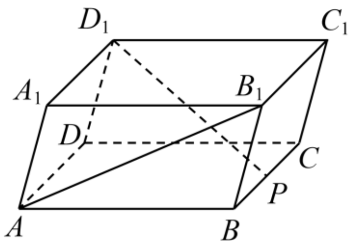
17. 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动，每轮活动由甲、乙各猜一个成语，已知甲每轮猜对的概率为 $\frac{3}{4}$，乙每轮猜对的概率为 $\frac{2}{3}$ ·在每轮活动中，甲和乙猜对与否互不影响，各轮结果也互不影响，求

（1）“星队”在两轮活动中猜对 2 个成语的概率;

（2）“星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率;

（3）“星队”在两轮活动至少中猜对 1 个成语的概率;

18. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=\angle BAD=60^\circ$，$AB=AD=2$，$AA_1=1$，点 P 为线段 BC 中点.



（1）求$\left|\overrightarrow{D_1P}\right|$；

（2）求直线AB_1与D_1P所成角的余弦值.

19. 甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$.假设两人射击是否击中目标相互之间没有影响，每人每次射击是否击中目标相互之间也没有影响.

（1）求甲、乙各射击一次均击中目标的概率；

（2）求甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标的概率；

（3）若乙在射击中出现连续 2 次未击中目标就会被终止射击，求乙恰好射击 4 次后被终止射击的概率.

20. 如图 1，在四边形$ABCD$中，$AD // BC$，$BC=2AD$．E，F分别为AD，BC的中点，$AE=EF=1$，$AF=\sqrt{2}AE$. 将四边形$ABFE$沿EF折起，使平面$ABFE\perp$平面$EFCD$（如图 2）G是BF的中点.

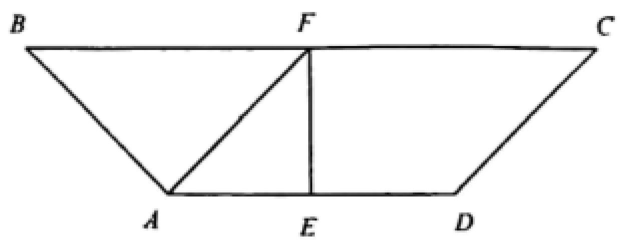


图 1

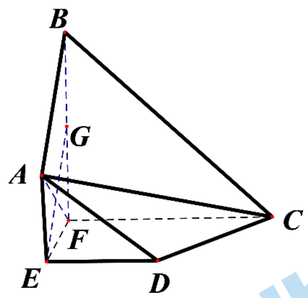


图 2

（1）证明：$AC\perp EG$.

（2）在线段BC上是否存在一点H，使得$DH //$平面$ABFE$？若存在，求$\frac{BH}{BC}$的值；若不存在，说明理由；

（3）证明：平面$DAC\perp$平面ACF.

21. 设全体空间向量组成的集合为V，$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$为$V$中的一个单位向量，建立一个“自变量”为向量，“应变量”也是向量的“向量函数”$f\left(\vec{x}\right): f\left(\vec{x}\right)=-\vec{x}+2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\left(\vec{x}\in V\right)$.

（1）设$\vec{u}=\left(1,0,0\right)$，$\vec{v}=\left(0,0,1\right)$，若$f\left(\vec{u}\right)=\vec{v}$，求向量$\vec{a}$；

（2）对于V中的任意两个向量$\vec{x}$，$\vec{y}$，证明：$f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)=\vec{x}\cdot\vec{y}$；

（3）对于V中的任意单位向量$\vec{x}$，求$\left|f\left(\vec{x}\right)-\vec{x}\right|$的最大值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】根据共面向量的推论得到 $x+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$，解方程即可.

【详解】因为点 M 在平面 ABC 内，所以点 M，A，B，C 四点共面，所以 $x+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$，解得 $x=\frac{1}{6}$.

故选：B.

2.【答案】C

【分析】根据事件的关系和运算结合随机事件的概率性质，分别判断各个选项即可.

【详解】对于 A 选项：当 A，B 为两个互斥事件时，才有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，所以 A 选项错误；

对于 B 选项：当事件 A，B，C 两两互斥，且 $A\cup B\cup C=\Omega$ 时，才有 $P(A)+P(B)+P(C)=1$，所以 B 选项错误；

对于 C 选项：当 A，B 为互斥事件时，$P(A)+P(B)=P(A\cup B)\le 1$，所以 C 选项正确；

对于 D 选项：由概率的性质可知，若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\le P(B)$，所以 D 选项错误；

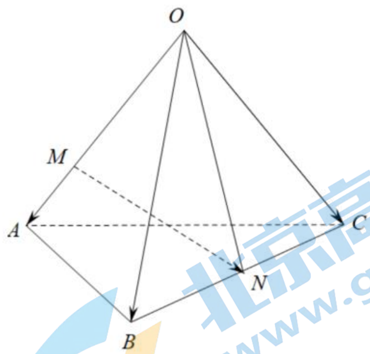
故选：C.

3.【答案】B

【分析】连接 ON，利用空间向量基本定理可得答案.

【详解】连接 $ON, \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：B.



4.【答案】B

【分析】分别求出基本事件的总数和所求事件的基本事件的个数，再根据古典概型即可得解.

【详解】解：基本事件为$8\times8=64$种，两球编号之和不小于15的情况有三种，分别为$(7,8)$、$(8,7)$、$(8,8)$，

$\therefore$所求概率为$\dfrac{3}{64}$.

故选：B.

5.【答案】B

【分析】根据互斥的定义和相互独立的公式即可求解.

【详解】对于选项 A：第一次掷出点数为 3，第二次掷出点数为 3，满足事件 A，也满足事件 B，因此 A 与 B 能够同时发生，所以 A 与 B 不互斥，故选项 A 错误；

对于选项 B：$P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$P(BC)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$，所以$P(BC)=P(B)\cdot P(C)$，所以 B 与C相互独立，即选项 B 正确；

对于选项 C：$P(A)=\dfrac{5}{36}\neq\dfrac{1}{6}$，故选项 C 错误；

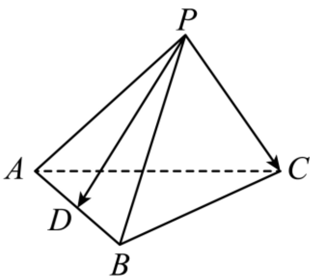
对于选项 D：第一次掷出点数为 3，第二次掷出点数为 3，满足事件 A，也满足事件 C，因此 A 与 C 能够同时发生，所以 A 与 C 不互斥，故选项 D 错误；

故选：B.

6.【答案】D

【分析】在正四面体$P-ABC$中，由中点性质可得$\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$，则$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PC}$可代换为$\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\overrightarrow{PC}$，由向量的数量积公式即可求解.

【详解】



如图，因为 D 为棱 AB 的中点，所以$\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$，

$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\right)$，

由正四面体得性质，$\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{PC}$的夹角为60°，同理$\overrightarrow{PB}$与$\overrightarrow{PC}$的夹角为60°，$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{PC}\right|=1$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，

故 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

故选：D.

7.【答案】C

【分析】由随机选择标有序号①②③④⑤中的一个小正方形涂黑共有 5 种等可能的结果，使与图中阴影部分构成轴对称图形的有 3 种情况，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】∵在方格纸中，随机选择标有序号①②③④⑤中的一个小正方形涂黑，

共有 5 种等可能的结果，使与图中阴影部分构成轴对称图形的有②④⑤，3 种情况，

∴使与图中阴影部分构成轴对称图形的概率是：$3\div 5=\frac{3}{5}$.

故选：C.

8.【答案】D

【分析】计算 $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(4,4,0)$，根据投影公式得到答案.

【详解】根据题意：$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(4,4,0)$，

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影向量的模为 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{-4+8}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：D.

9.【答案】A

【分析】根据 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面得到 $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$，然后列方程求解即可.

【详解】因为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，所以 $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$，即 $\begin{cases}2=-\lambda-3\mu\\-1=4\lambda+5\mu\\3=2\lambda+x\mu\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=1\\\mu=-1\\x=-1\end{cases}$.

故选：A.

10.【答案】A

【分析】根据隔板法得到 $x+y+z=10\left(x,y,z\in\mathrm{N}^*\right)$ 的解有 $\mathrm{C}_9^2=36$ 组，然后列举得到 $\xi=7$ 有 6 组解，最后求概率即可.

【详解】根据隔板法，将 10 看做 10 和完全相同的小球排成一排，中间形成 9 个空，放入两个隔板，可求得 $x+y+z=10\left(x,y,z\in\mathrm{N}^*\right)$ 的解有 $\mathrm{C}_9^2=36$ 组，

$\xi=7$ 时，$(x,y,z)=(7,1,2)$ 或 $(7,2,1)$ 或 $(1,2,7)$ 或 $(1,7,2)$ 或 $(2,1,7)$ 或 $(2,7,1)$，

所以 $P(\xi=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

故选：A.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$\frac{1}{2}$

【详解】试题分析：从甲、乙、丙、丁四个人中任选两名志愿者有（甲，乙）、（甲，丙）、（甲，丁）、（乙，丙）、（乙，丁）、（丙，丁）六种取法，其中甲被选中有（甲，乙）、（甲，丙）、（甲，丁）三种，所以甲被选中的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

考点：本小题主要考查古典概型概率的求解.

点评：求古典概型概率时，要保证每一个基本事件都是等可能的.

12.【答案】$\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{4\sqrt{2}}{10},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$和$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{4\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【分析】利用与$\vec{a}$共线的单位向量为$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$或$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$求解即可

【详解】设$\vec{a}=(-3,-4,5)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

所以与$\vec{a}=(-3,-4,5)$共线的单位向量为

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(-3,-4,5)=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{4\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{1}{5\sqrt{2}}(-3,-4,5)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{4\sqrt{2}}{10},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

故答案为：$\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{4\sqrt{2}}{10},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$和$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{10},-\frac{4\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【点睛】结论点睛：本题考查求空间向量的单位向量，利用与$\vec{a}$共线的单位向量为$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$或$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$求解即可，考查学生的运算求解能力，属于基础题.

13.【答案】$\sqrt{41}$

【分析】由$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，解得$x=1$，从而$\vec{a}+3\vec{b}=(-1,2,6)$，由此能求出$|\vec{a}+3\vec{b}|$.

【详解】∵$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+(-1)\times1+3x=0$，解得$x=1$，

∴$\vec{b}=(-1,1,1)$，

则$\vec{a}+3\vec{b}=(2,-1,3)+(-3,3,3)=(-1,2,6)$，

∴$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}$，

故答案为：$\sqrt{41}$.

14.【答案】 ①. 45 ②. $\frac{1}{5}$

【分析】由洛书上所有数相加即得和，用列举法列出从五个阳数中随机抽取三个数的所有基本事件，求和

后知和为 15 的基本事件的个数，从而可得概率.

【详解】甲壳上所有阴阳数之和为$1+2+\cdots 9=45$（或$15\times 3=45$），

五个阳数是 1,3，5,7，9，任取 3 个数所得基本事件有：135,137,139,157,159,179,357,359,379,579 共 10 个，

其中和为 15 的有 159,357 共 2 个，所求概率为 $P=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

故答案为：45；$\dfrac{1}{5}$.

【点睛】本题考查数学文化，考查古典概型，用列举法是解决古典概型的常用方法．通过中国古代数学文化激发学生的学习兴趣，激发学生求知欲和创新意识，拓展学生的思维，培养学生的爱国情怀.

15.【答案】 ①. $\sqrt{2}$ ②. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【分析】(Ⅰ) 当点 M 与点 C 重合时，可以得到点 P 与点 B_1 重合，从而可得 AP 的长度；

(Ⅱ) 利用线面垂直得到等量关系，结合二次函数求解最值.

【详解】以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，设

$M(0,1,m),P(x,y,1)$, 则 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y,1),\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{BM}=(-1,0,m)$.

因为 $AP\perp$ 平面 MBD_1，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0\end{cases}$, $\begin{cases}1-x+m=0\\ 2-x-y=0\end{cases}$.

(Ⅰ) 当点 M 与点 C 重合时，$m=0$，$x=y=1$,此时 AP 的长度为 $\sqrt{2}$；

(Ⅱ) $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+1}=\sqrt{2y^2-2y+2}\geq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】本题主要考查空间中的垂直关系及动线段的长度问题.动点引发的长度变化，要寻求其中不变的关系式，综合运用其他知识求解.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $\dfrac{3}{5}$ (2) $\dfrac{9}{10}$

【分析】

首先用列举法，求得甲、乙两人各抽一题的所有可能情况.

(1) 根据上述分析，分别求得“甲抽到判断题，乙抽到选择题”和“甲、乙两人中有一个抽到选择题，另一个抽到判断题”的概率，然后根据互斥事件概率加法公式，求得“甲、乙两人中有一个抽到选择题，另一个抽到判断题”的概率.

(2) 根据上述分析，求得“甲、乙两人都抽到判断题”的概率，根据对立事件概率计算公司求得“甲、乙两人中至少有一人抽到选择题” 的概率.

【详解】把 3 个选择题记为 x_1,x_2,x_3，2 个判断题记为 p_1,p_2“甲抽到选择题，乙抽到判断题”的情况有

(x_1,p_1)，(x_1,p_2)，(x_2,p_1)，(x_2,p_2)，(x_3,p_1)，(x_3,p_2)，共 6 种；“甲抽到判断题，乙抽到选择题”

的情况有(p_1,x_1)，(p_1,x_2)，(p_1,x_3)，(p_2,x_1)，(p_2,x_2)，(p_2,x_3)，共 6 种；“甲、乙都抽到选择题”的情况有(x_1,x_2)，(x_1,x_3)，(x_2,x_1)，(x_2,x_3)，(x_3,x_1)，(x_3,x_2)，共 6 种；“甲、乙都抽到判断题”的情况有(p_1,p_2)，(p_2,p_1)，共 2 种.

因此基本事件的总数为$6+6+6+2=20$.

（1）记“甲抽到选择题，乙抽到判断题”为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$.记“甲抽到判断题，乙抽到选择题”为事件 B，则 $P(B)=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$，故“甲、乙两人中有一个抽到选择题，另一个抽到判断题”的概率为

$P(A+B)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{5}$.

（2）记“甲、乙两人至少有一人抽到选择题”为事件 C，则 $\overline{C}$ 为“甲、乙两人都抽到判断题”，由题意

$P(\overline{C})=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$，故“甲、乙两人至少有一人抽到选择题”的概率为$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$.

【点睛】本小题主要考查互斥事件概率计算，考查对立事件，属于基础题.

17. 【答案】（1）$\dfrac{37}{144}$；（2）$\dfrac{5}{12}$；（3）$\dfrac{143}{144}$.

【分析】令$\{M_0，M_1，M_2\}$、$\{N_0，N_1，N_2\}$表示第一轮、第二轮猜对 0 个、1 个、2 个成语的事件，$\{D_0，D_1，D_2，D_3，D_4\}$表示两轮猜对 0 个、1 个、2 个、3 个、4 个成语的事件，应用独立事件乘法公式、互斥事件加法公式求 $P(M_0)=P(N_0)$、$P(M_1)=P(N_1)$、$P(M_2)=P(N_2)$.

（1）（2）应用独立事件乘法、互斥事件加法求两轮活动中猜对 2 个成语的概率;

（3）对立事件的概率求法求两轮活动至少中猜对 1 个成语的概率.

【详解】设 A，B 分别表示甲乙每轮猜对成语的事件，M_0，M_1，M_2表示第一轮甲乙猜对 0 个、1 个、2 个成语的事件，N_0，N_1，N_2表示第二轮甲乙猜对 0 个、1 个、2 个成语的事件，D_0，D_1，D_2，D_3，D_4表示两轮猜对 0 个、1 个、2 个、3 个、4 个成语的事件.

$\because P(A)=\dfrac{3}{4}$，$P(\overline{A})=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{2}{3}$，$P(\overline{B})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$根据独立性的假定得：$P(M_0)=P(N_0)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，

$P(M_1)=P(N_1)=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{12}$，

$P(M_2)=P(N_2)=P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$，

（1）$P(D_2)=P(M_2N_0+M_1N_1+M_0N_2)=P(M_2N_0)+P(M_1N_1)+P(M_0N_2)=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{12}+\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=\dfrac{37}{144}$.

（2）$P(D_3)=P(M_1N_2+M_2N_1)=P(M_1N_2)+P(M_2N_1)=\dfrac{5}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{12}$.

（3）$P(D_1+D_2+D_3+D_4)=1-P(D_0)=1-\dfrac{1}{144}=\dfrac{143}{144}$.

18.【答案】（1）$\left|\overrightarrow{D_1P}\right|=\sqrt{3}$

（2）$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$

【分析】(1)首先设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，得到$\overrightarrow{D_1P}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$，再平方即可得到答案；

(2) 由$\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{c}$，得$\left|\overrightarrow{AB_1}\right|=\sqrt{7}$，代入$\cos\left\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{D_1P}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{D_1P}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\left|\overrightarrow{D_1P}\right|}$计算即可.

【小问 1 详解】

因为在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在线段BC上，且满足$BP=PC$.

设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，这三个向量不共面，$\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$构成空间的一个基底.

所以$\overrightarrow{D_1P}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD_1}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)=\left(\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

$\because\overrightarrow{D_1P}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$，$\therefore\overrightarrow{D_1P}^2=\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)^2=\vec{a}^2+\dfrac{1}{4}\vec{b}^2+\vec{c}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=4+\dfrac{1}{4}\times4+1-2\times2\times\dfrac{1}{2}-2\times2\times1\times\dfrac{1}{2}+2\times1\times\dfrac{1}{2}=4+1+1-2-2+1=3$，

$\therefore\left|\overrightarrow{D_1P}\right|=\sqrt{3}$.

【小问 2 详解】

由（1）知$\because\overrightarrow{D_1P}=\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$，$\left|\overrightarrow{D_1P}\right|=\sqrt{3}$，

$\because\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{c}$，$\left|\overrightarrow{AB_1}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{c}\right)^2}=\sqrt{4+1+2\times2\times1\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{7}$，

$\therefore\cos\left\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{D_1P}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{D_1P}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\left|\overrightarrow{D_1P}\right|}=\dfrac{\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)}{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\vec{a}^2-\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2}{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

直线AB_1与D_1P所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

19.【答案】（1）$\frac{1}{2}$

（2）$\dfrac{16}{81}$

（3）$\dfrac{3}{64}$

【分析】（1）由于两人射击是否击中目标相互之间没有影响，所以由相互独立事件的概率公式求解即可；

（2）记事件 A_i 表示“甲第 $i\left(i=1,2,3,4\right)$ 次射击击中目标”，并记“甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标”为事件 C，则 $C=A_1A_2A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4$，且 $A_1A_2A_3\overline{A_4}$ 与 $\overline{A_1}A_2A_3A_4$ 是互斥事件，再由独立事件和互斥事件的概率求解即可；

（3）记事件 B_i 表示“乙第 $i\left(i=1,2,3,4\right)$ 次射击击中目标”，事件 D 表示“乙在第 4 次射击后被终止射击”，则 $D=B_1B_2\overline{B_3}\,\overline{B_4}\cup\overline{B_1}B_2\overline{B_3}\,\overline{B_4}$，且 $B_1B_2\overline{B_3}\,\overline{B_4}$ 与 $\overline{B_1}B_2\overline{B_3}\,\overline{B_4}$ 是互斥事件，再利用由独立事件和互斥事件的概率求解即可.

【小问 1 详解】

用事件 A 表示“甲击中目标”，事件 B 表示“乙击中目标”.

依题意知，事件 A 和事件 B 相互独立，

因此甲、乙各射击一次均击中目标的概率为 $P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

用事件 A_i 表示“甲第 $i\left(i=1,2,3,4\right)$ 次射击击中目标”，并记“甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标”为事件 C，则 $C=A_1A_2A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4$，且 $A_1A_2A_3\overline{A_4}$ 与 $\overline{A_1}A_2A_3A_4$ 是互斥事件.

由于 A_1，A_2，A_3，A_4 之间相互独立，

所以 A_i 与 $\overline{A_j}$（i，$j=1,2,3,4$，且 $i\neq j$）之间也相互独立.

由于 $P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=P\left(A_3\right)=P\left(A_4\right)=\dfrac{2}{3}$，

所以 $P\left(\overline{A_1}\right)=P\left(\overline{A_2}\right)=P\left(\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_4}\right)=\dfrac{1}{3}$，

故 $P(C)=P\left(A_1A_2A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4\right)$

$=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)P\left(\overline{A_4}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)P\left(A_4\right)$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{16}{81}$.

所以甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标的概率为 $\dfrac{16}{81}$.

【小问 3 详解】

用事件 B_i 表示"乙第 $i\left(i=1,2,3,4\right)$ 次射击击中目标"，事件 D 表示"乙在第 4 次射击后被终止射击"，

则 $D=B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\cup\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$，且 $B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$ 与 $\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$ 是互斥事件.

由于 B_1，B_2，B_3，B_4 之间相互独立，

所以 B_i 与 $\overline{B}_j$（i，$j=1,2,3,4$，且 $i\neq j$）之间也相互独立.

因为 $P\left(B_i\right)=\dfrac{3}{4}(i=1,2,3,4)$，

所以 $P\left(\overline{B}_i\right)=\dfrac{1}{4}(i=1,2,3,4)$，

故 $P(D)=P\left(B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\cup\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\right)$

$=P\left(B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\right)+P\left(\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\right)$

$=P\left(B_1\right)P\left(B_2\right)P\left(\overline{B}_3\right)P\left(\overline{B}_4\right)+P\left(\overline{B}_1\right)P\left(B_2\right)P\left(\overline{B}_3\right)P\left(\overline{B}_4\right)$

$=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{3}{64}$.

所以乙恰好射击 4 次后被终止射击的概率为 $\dfrac{3}{64}$.

20.【答案】（1）见解析　（2）存在，$\frac{1}{2}$

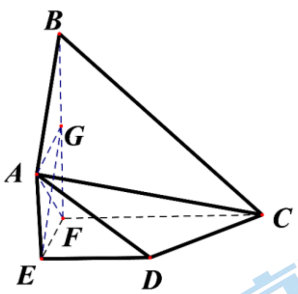
（3）见解析

【分析】（1）先利用线面垂直的判定定理证明 EG 与平面 ACF 垂直，再利用线面垂直的性质定理得到 $AC\perp EG$.

（2）取 D 为 BC 中点时，利用线面平行的判定定理可得 DH // 平面 $ABFE$.

（3）利用面面垂直的判定定理可得平面 $DAC\perp$ 平面 ACF.

【小问 1 详解】



证明：如图连接 AG，

在图 1 中，因为 E，F 分别为 AD，BC 的中点，$BC=2AD$，AD // BC，

所以 $AE=\dfrac{1}{2}BF$ 且 AE // BF，又因为 G 是 BF 的中点，

所以 $AE=GF$ 且 AE // GF，四边形 $AEFG$ 为平行四边形，

又因为 $AE=EF=1$， $AF=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}$，

所以 $AE\perp EF$，四边形 $AEFG$ 为正方形，

所以 $EG\perp AF$，

易知 $CF\perp EF$，又因为在图 2 中，平面 $ABFE\perp$ 平面 $EFCD$，

平面 $ABFE\bigcap$ 平面 $EFCD=EF$， $CF\subset$ 平面 $EFCD$，

所以 $CF\perp$ 平面 $ABFE$，又 $EG\subset ABFE$，

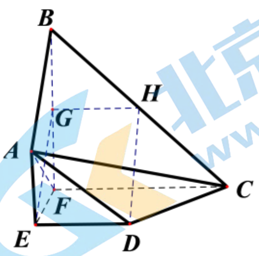
所以 $CF\perp EG$，

又 $AF\cap CF=F$， $CF\subset$ 平面 ACF， $AF\subset$ 平面 ACF，

所以 $EG\perp$ 平面 ACF，又 $AC\subset$ 平面 ACF，

所以 $AC\perp EG$.

【小问 2 详解】



如图取 BC 的中点为 H，连接 GH、HD，

因为 G 为 BF 的中点，所以 $GH\parallel FC$， $GH=\dfrac{1}{2}FC$，

由（1）易知 $ED\parallel FC$， $ED=\dfrac{1}{2}FC$，

所以 $GH\parallel ED$， $GH=ED$，

所以四边形 $DEGH$ 为平行四边形，

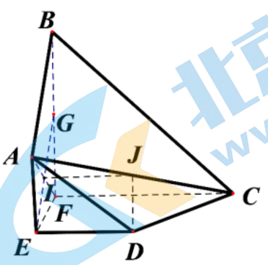
因此 $EG\parallel DH$，

又 $EG\subset$ 平面 $ABFE$， $DH\not\subset$ 平面 $ABFE$，

所以 $DH\parallel$ 平面 $ABFE$，

此时 $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

【小问 3 详解】



证明：如图设 AF 与 GE 的交点为 I，AC 的中点为 J，连接 IJ、JD，

所以 $IJ \parallel FC$， $IJ=\frac{1}{2}FC$，

又 $ED \parallel FC$， $ED=\frac{1}{2}FC$，

所以 $IJ \parallel ED$， $IJ=ED$，

所以四边形 $DEIJ$ 为平行四边形，

所以 $EG \parallel DJ$，

又由（1）得 $EG \perp$ 平面 ACF，

所以得 $DJ \perp$ 平面 ACF，

又因为 $DJ \subset$ 平面 DAC，

所以平面 $DAC \perp$ 平面 ACF.

21.【答案】（1）$\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\vec{a}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；（2）见解析；（3）最大值为 2.

【详解】分析：（1）$f\left(\vec{u}\right)=-\vec{u}+2\left(\vec{u}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}=\vec{v}$，设 $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$，代入运算得：$\begin{cases}2x^2-1=0\\ 2xy=0\\ 2xz=1\end{cases}$，从而可得结果；（2）设 $\vec{x}=\left(a,b,c\right)$，$\vec{y}=\left(m,n,t\right)$，$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，则利用“向量函数”的解析式化简 $f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)$，从而可得结果；（3）设 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 α，则 $\vec{x}\cdot\vec{a}=\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cos\alpha=\cos\alpha$，则 $\left|f\left(\vec{x}\right)-\vec{x}\right|=\left|2\vec{x}-2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right|=\sqrt{\left(2\vec{x}-2\cos\alpha\vec{a}\right)^2}=\sqrt{4-4\cos^2\alpha}\le 2$，即最大值为 2.

详解：（1）依题意得：$f\left(\vec{u}\right)=-\vec{u}+2\left(\vec{u}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}=\vec{v}$，设 $\vec{a}=\left(x,y,z\right)$，代入运算得：

$$\begin{cases}2x^2-1=0\\ 2xy=0\\ 2xz=1\end{cases}\Rightarrow\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{或}\vec{a}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

（2）设 $\vec{x}=\left(a,b,c\right)$，$\vec{y}=\left(m,n,t\right)$，$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，则

$$f\left(\vec{x}\right)\cdot f\left(\vec{y}\right)=\left[-\vec{x}+2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right]\cdot\left[-\vec{y}+2\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right]$$

$$=\vec{x}\cdot\vec{y}-4\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)+4\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{a}\right)^2=\vec{x}\cdot\vec{y}-4\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)+4\left(\vec{y}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)=\vec{x}\cdot\vec{y}$$

从而得证；

（3）设 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 α，则 $\vec{x}\cdot\vec{a}=\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cos\alpha=\cos\alpha$，

则 $\left|f\left(\vec{x}\right)-\vec{x}\right|=\left|2\vec{x}-2\left(\vec{x}\cdot\vec{a}\right)\vec{a}\right|=\sqrt{\left(2\vec{x}-2\cos\alpha\vec{a}\right)^2}=\sqrt{4-4\cos^2\alpha}\le 2$，故最大值为 2.

点睛：新定义问题一般先考察对定义的理解，这时只需一一验证定义中各个条件即可.二是考查满足新定义

的函数的简单应用，如在某些条件下，满足新定义的函数有某些新的性质，这也是在新环境下研究“旧”性质，此时需结合新函数的新性质，探究“旧”性质.三是考查综合分析能力，主要将新性质有机应用在“旧”性质，创造性证明更新的性质.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！