绝密★本科目考试启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（理）（北京卷）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数 $z=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5}$

（C）3　　（D）5

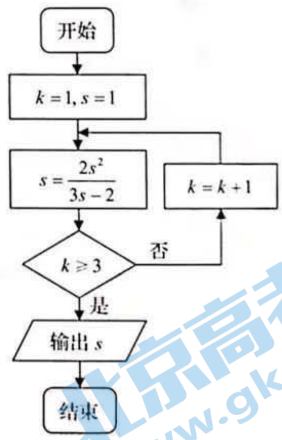
（2）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为

（A）1

（B）2

（C）3

（D）4



（3）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数），则点 $(1, 0)$ 到直线 l 的距离是

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{2}{5}$

（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{6}{5}$

（4）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，则

（A）$a^2=2b^2$　　（B）$3a^2=4b^2$

（C）$a=2b$　　（D）$3a=4b$

(5) 若 x, y 满足 $|x|\leqslant 1-y$，且 $y\geqslant -1$，则 $3x+y$ 的最大值为

(A) -7　　　　(B) 1

(C) 5　　　　(D) 7

(6) 在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k\ (k=1,2)$．已知太阳的星等是 -26.7，天狼星的星等是 -1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

(A) $10^{10.1}$　　　　(B) 10.1

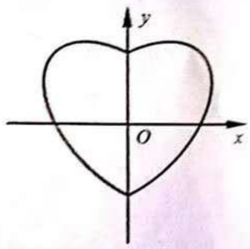
(C) $\lg 10.1$　　　　(D) $10^{-10.1}$

(7) 设点 A,B,C 不共线，则"$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角"是"$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$"的

(A) 充分而不必要条件　　　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

(8) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 $C: x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图）．给出下列三个结论：



① 曲线 C 恰好经过6个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；

③ 曲线 C 所围成的"心形"区域的面积小于3．

其中，所有正确结论的序号是

(A) ①　　　　(B) ②

(C) ①②　　　　(D) ①②③

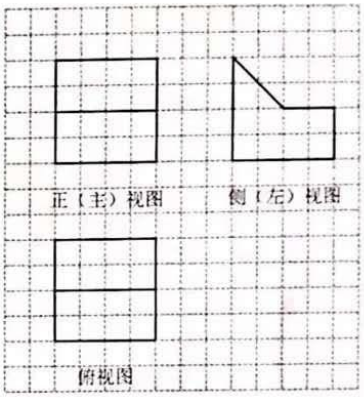
第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（9）函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是________.

（10）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_2=-3$，$S_5=-10$，则 $a_5=$________，S_n 的最小值为________.

（11）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为1，那么该几何体的体积为________.



（12）已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

① $l\perp m$；　② $m/\!/\alpha$；　③ $l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：________.

（13）设函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$（a 为常数）．若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a=$________；若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是________.

（14）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为60元/盒、65元/盒、80元/盒、90元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到120元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的80%．

① 当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各1盒，需要支付________元；

② 在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

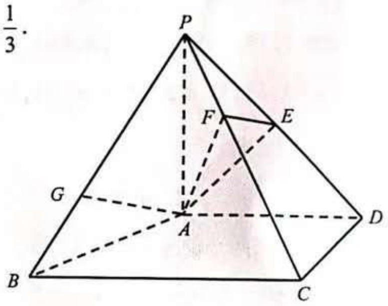
在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求b,c的值；

（Ⅱ）求$\sin(B-C)$的值.

（16）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\perp CD$，$AD/\!/BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$．E为PD的中点，点F在PC上，且$\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.



（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面PAD；

（Ⅱ）求二面角$F-AE-P$的余弦值；

（Ⅲ）设点G在PB上，且$\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$．判断直线$AG$是否在平面$AEF$内，说明理由.

（17）（本小题 13 分）

改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额（元） 支付方式	(0, 1 000]	(1 000, 2 000]	大于 2 000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取1人，估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取1人，以X表示这 2 人中上个月支付金额大于1 000 元的人数，求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查3人，发现他们本月的支付金额都大于 2 000 元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2 000 元的人数有变化？说明理由.

(18)（本小题 14 分）

已知抛物线 C：$x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N，直线 $y=-1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B．求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

(19)（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|$ $(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$．当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值.

(20)（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$，从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_m 项（$i_1<i_2<\cdots<i_m$），若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列．规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.

（Ⅰ）写出数列 $1,8,3,7,5,6,9$ 的一个长度为 4 的递增子列；

（Ⅱ）已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}，长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}．若 $p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

（Ⅲ）设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$，且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个（$s=1,2,\cdots$），求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）D　　（2）B　　（3）D　　（4）B

（5）C　　（6）A　　（7）C　　（8）C

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）$\frac{\pi}{2}$　　（10）0　　-10

（11）40　　（12）若$l\perp m$，$l\perp\alpha$，则$m//\alpha$.（答案不唯一）

（13）-1　　$(-\infty,0]$　　（14）130　　15

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$$b^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times(-\frac{1}{2}).$$

因为$b=c+2$，

所以$(c+2)^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times(-\frac{1}{2})$.

解得$c=5$.

所以$b=7$.

（Ⅱ）由$\cos B=-\frac{1}{2}$得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得$\sin C=\frac{c}{b}\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

在$\triangle ABC$中，$\angle B$是钝角，

所以$\angle C$为锐角.

所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{11}{14}$.

所以$\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

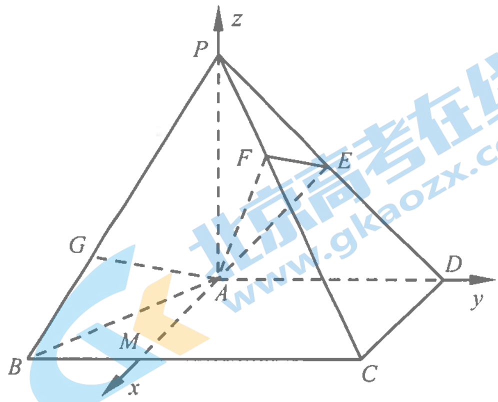
(16)（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$．

又因为 $AD\perp CD$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD．



（Ⅱ）过 A 作 AD 的垂线交 BC 于点 M．

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AM$， $PA\perp AD$．

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$， $B(2,-1,0)$， $C(2,2,0)$， $D(0,2,0)$， $P(0,0,2)$．

因为 E 为 PD 的中点，所以 $E(0,1,1)$．

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$， $\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$， $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$．

所以 $\overrightarrow{PF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$， $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$．

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}y+z=0,\\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $y=-1$， $x=-1$．

于是 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$．

又因为平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

由题知，二面角 $F-AE-P$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（Ⅲ）直线 AG 在平面 AEF 内．

因为点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$， $\overrightarrow{PB}=(2,-1,-2)$，

所以 $\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}=(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$， $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$．

由（Ⅱ）知，平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$．

所以 $\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$．

所以直线 AG 在平面 AEF 内．

(17)(共 13 分)

解:(Ⅰ)由题意知，样本中仅使用 A 的学生有 $18+9+3=30$ 人，仅使用 B 的学生有 $10+14+1=25$ 人，A, B 两种支付方式都不使用的学生有 5 人.

故样本中 A, B 两种支付方式都使用的学生有 $100-30-25-5=40$ 人.

所以从全校学生中随机抽取 1 人，该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率估计为 $\dfrac{40}{100}=0.4$.

(Ⅱ) X 的所有可能值为 $0,1,2$.

记事件 C 为“从样本仅使用 A 的学生中随机抽取 1 人，该学生上个月的支付金额大于 1 000 元”，事件 D 为“从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人，该学生上个月的支付金额大于 1 000 元”.

由题设知，事件 C, D 相互独立，且 $P(C)=\dfrac{9+3}{30}=0.4$，$P(D)=\dfrac{14+1}{25}=0.6$.

所以 $P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=0.24$，

$$
\begin{aligned}
P(X=1)&=P(C\bar{D}\cup\bar{C}D)\\
&=P(C)P(\bar{D})+P(\bar{C})P(D)\\
&=0.4\times(1-0.6)+(1-0.4)\times0.6\\
&=0.52,
\end{aligned}
$$

$P(X=0)=P(\bar{C}\bar{D})=P(\bar{C})P(\bar{D})=0.24$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.24	0.52	0.24

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times0.24+1\times0.52+2\times0.24=1$.

(Ⅲ)记事件 E 为“从样本仅使用 A 的学生中随机抽查 3 人，他们本月的支付金额都大于 2 000 元”.

假设样本仅使用 A 的学生中，本月支付金额大于 2 000 元的人数没有变化，则由上个月的样本数据得 $P(E)=\dfrac{1}{C_{30}^{3}}=\dfrac{1}{4060}$.

答案示例 1：可以认为有变化．理由如下：

$P(E)$ 比较小，概率比较小的事件一般不容易发生．一旦发生，就有理由认为本月的支付金额大于 2 000 元的人数发生了变化．所以可以认为有变化.

答案示例 2：无法确定有没有变化．理由如下：

事件 E 是随机事件，$P(E)$ 比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，所以无法确定有没有变化.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由抛物线 C：$x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$，得 $p=2$．

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=-4y$，其准线方程为 $y=1$．

（Ⅱ）抛物线 C 的焦点为 $F(0,-1)$．

设直线 l 的方程为 $y=kx-1$（$k\neq 0$）．

由 $\begin{cases} y=kx-1, \\ x^2=-4y \end{cases}$ 得 $x^2+4kx-4=0$．

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=-4$．

直线 OM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$．

令 $y=-1$，得点 A 的横坐标 $x_A=-\dfrac{x_1}{y_1}$．

同理得点 B 的横坐标 $x_B=-\dfrac{x_2}{y_2}$．

设点 $D(0,n)$，则 $\overrightarrow{DA}=(-\dfrac{x_1}{y_1},-1-n)$，$\overrightarrow{DB}=(-\dfrac{x_2}{y_2},-1-n)$，

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}+(n+1)^2$$

$$=\frac{x_1x_2}{(-\frac{x_1^2}{4})(-\frac{x_2^2}{4})}+(n+1)^2$$

$$=\frac{16}{x_1x_2}+(n+1)^2$$

$$=-4+(n+1)^2.$$

令 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，即 $-4+(n+1)^2=0$，得 $n=1$ 或 $n=-3$．

综上，以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$．

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1$．

令 $f'(x)=1$，即 $\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=1$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{8}{3}$．

又 $f(0)=0$，$f(\dfrac{8}{3})=\dfrac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\dfrac{8}{27}=x-\dfrac{8}{3}$，

即 $y=x$ 与 $y=x-\dfrac{64}{27}$．

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-x$， $x\in[-2,4]$.

由 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$.

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$.

$g'(x),g(x)$ 的情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3},4)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6，最大值为 0.

故 $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，即 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，

当 $a<-3$ 时，$M(a)\geqslant F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时，$M(a)\geqslant F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；

当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$.

综上，当 $M(a)$ 最小时，$a=-3$.

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$1,3,5,6$.（答案不唯一）

（Ⅱ）设长度为 q 末项为 a_{n_0} 的一个递增子列为 $a_{r_1},a_{r_2},\cdots,a_{r_{q-1}},a_{n_0}$.

由 $p<q$，得 $a_{r_p}\leqslant a_{r_{q-1}}<a_{n_0}$.

因为 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列末项的最小值为 a_{m_0}，

又 $a_{r_1},a_{r_2},\cdots,a_{r_p}$ 是 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列，

所以 $a_{m_0}\leqslant a_{r_p}$.

所以 $a_{m_0}<a_{n_0}$.

（III）由题设知，所有正奇数都是 $\{a_n\}$ 中的项．

先证明：若 $2m$ 是 $\{a_n\}$ 中的项，则 $2m$ 必排在 $2m-1$ 之前（ m 为正整数）．

假设 $2m$ 排在 $2m-1$ 之后．

设 $a_{p_1}, a_{p_2}, \cdots, a_{p_{m-1}}, 2m-1$ 是数列 $\{a_n\}$ 的长度为 m 末项为 $2m-1$ 的递增子列，则 $a_{p_1}, a_{p_2}, \cdots, a_{p_{m-1}}, 2m-1, 2m$ 是数列 $\{a_n\}$ 的长度为 $m+1$ 末项为 $2m$ 的递增子列．与已知矛盾．

再证明：所有正偶数都是 $\{a_n\}$ 中的项．

假设存在正偶数不是 $\{a_n\}$ 中的项，设不在 $\{a_n\}$ 中的最小的正偶数为 $2m$ ．

因为 $2k$ 排在 $2k-1$ 之前（ $k=1,2,\cdots,m-1$ ），所以 $2k$ 和 $2k-1$ 不可能在 $\{a_n\}$ 的同一个递增子列中．

又 $\{a_n\}$ 中不超过 $2m+1$ 的数为 $1,2,\cdots,2m-2,2m-1,2m+1$ ，所以 $\{a_n\}$ 的长度为 $m+1$ 且末项为 $2m+1$ 的递增子列个数至多为 $\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{(m-1)个}\times1\times1=2^{m-1}<2^m$ ．

与已知矛盾．

最后证明：$2m$ 排在 $2m-3$ 之后（ $m\geqslant2$ 为整数）．

假设存在 $2m\,(m\geqslant2)$，使得 $2m$ 排在 $2m-3$ 之前，则 $\{a_n\}$ 的长度为 $m+1$ 且末项为 $2m+1$ 的递增子列的个数小于 2^m ．与已知矛盾．

综上，数列 $\{a_n\}$ 只可能为 $2,1,4,3,\cdots,2m-3,2m,2m-1,\cdots$ ．

经验证，数列 $2,1,4,3,\cdots,2m-3,2m,2m-1,\cdots$ 符合条件．

所以 $a_n=\begin{cases}n+1, & n为奇数,\\ n-1, & n为偶数.\end{cases}$