2022 北京东城高一（上）期末

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的．

1．（3 分）已知全集 $U=\{1，2，3，4\}$，$A=\{1，3\}$，则 $\complement_U A=(\quad)$

A．$\{1，2\}$　　B．$\{2，3\}$　　C．$\{2，4\}$　　D．$\{3，4\}$

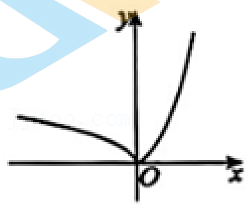
2．（3 分）在直角坐标系 xOy 中，已知 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5},\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，那么角 α 的终边与单位圆 $\odot O$ 坐标为$(\quad)$

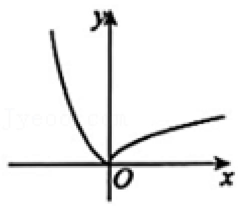
A．$(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5})$　　B．$(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$　　C．$(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$　　D．$(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5})$

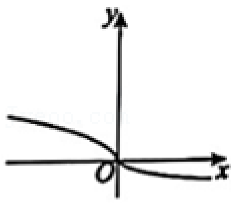
3．（3 分）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2=2$，那么 xy 的最大值为$(\quad)$

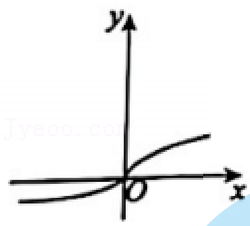
A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．2

4．（3 分）函数 $f(x)=\begin{cases}(\dfrac{1}{2})^x-1, x\leqslant 0\\ \sqrt{x}, x>0\end{cases}$ 的图象大致为$(\quad)$

A．

B．

C．

D．

5．（3 分）设 $\cos 28^\circ=a$，则 $\cos 62^\circ=(\quad)$

A．$-a$　　B．a　　C．$\sqrt{1-a^2}$　　D．$-\sqrt{1-a^2}$

6．（3 分）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-lnx$ 的零点所在的区间为$(\quad)$

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

7．（3 分）设 $a=\log_3 4$，$b=3^{-\frac{1}{3}}$，$c=\log_3 3^{-1}$，则$(\quad)$

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

8．（3 分）“$xy=0$”是“$x^2+y^2=0$”的$(\quad)$

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．（3 分）某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$ 在一个周期内的简图时，列表如下：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
y	0	2	0	-2	0

则 $f(x)$ 的解析式为(　　)

A． $f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{12})$　　B． $f(x)=2\sin(3x+\frac{\pi}{12})$

C． $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{12})$　　D． $f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{4})$

10．（3 分）已知函数 $f(x)=ln(ax-b)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$，那么函数 $g(x)=(ax+b)(x-1)$ 在区间 $(-1,1)$ 上(　　)

A．有最小值无最大值　　B．有最大值无最小值

C．既有最小值也有最大值　　D．没有最小值也没有最大值

二、填空题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分．

11．（3 分）函数 $y=\sin 2x$ 的最小值为 ____．

12．（3 分）已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$（α 是常数）的图象经过点 $(2,4)$，那么 $f(-2)=$ ____．

13．（3 分）已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，且 $f(3+2a)<f$ （2），那么实数 a 的取值范围为 ____．

14．（3 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x},0<x<2\\ \log_2 x,x\geqslant 2\end{cases}$，且关于 x 的方程 $f(x)=t$ 有且仅有一个实数根，那么实数 t 的取值范围为 ____．

15．（3 分）设函数 $f(x)=\log_a(|x|+1)(a>1)$，则 $f(x)$ 是 ____（填“奇函数”或“偶函数”）；对于一定的正数 T，定义 $f_T(x)=\begin{cases}f(x),f(x)<T\\ -f(x),f(x)\geqslant T\end{cases}$，则当 $T=\frac{1}{a}$ 时，函数 $f_T(x)$ 的值域为 ____．

三、解答题共 6 小题，共 55 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．（8 分）已知集合 $A=\{x|x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x|m-1\leqslant x\leqslant m+1,\ m\in R\}$．

（I）当 $m=4$ 时，求 $A\bigcap B$；

（II）当 $A\bigcap B=\varnothing$ 时，求 m 的取值范围．

17．（10 分）已知函数 $f(x)=x^2+ax+4(a\in R)$．

（I）若 f （1）$=0$，求不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集；

（II）若 f （1）$=2$，求 $f(x)$ 在区间 $[-2$，$2]$ 上的最大值和最小值，并分别写出取得最大值和最小值时的 x 值；

（III）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

18．（10 分）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，再从下列两个条件中选择一个作为已知条件：

条件①： $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称；

条件②：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 对称．

（I）请写出你选择的条件，并求 $f(x)$ 的解析式；

（II）在（I）的条件下，求 $f(x)$ 的单调递增区间．

19．（10 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$．

（I）判断 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调性，并用函数单调性的定义给出证明；

（II）设 $g(x)=f(x)-k$（k 为常数）有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，当 $x_1<-\sqrt{3}$ 时，求 k 的取值范围．

20．（8 分）人口问题是世界普遍关注的问题，通过对若干个大城市的统计分析，针对人口密度分布进行模拟研究，发现人口密度与到城市中心的距离之间呈现负指数关系．指数模型 $d_x=d_0e^{-bx}$ 是经典的城市人口密度空间分布的模型之一，该模型的计算是基于圈层距离法获取距城市中心距离和人口密度数据的，具体而言就是以某市中心位置为圆心，以不同的距离为半径划分圈层，测量和分析不同圈层中的人口状况．其中 x 是圈层序号，将圈层序号是 x 的区域称为“x 环”（$x=1$ 时，1 环表示距离城市中心 $0\sim3$ 公里的圈层；$x=2$ 时，2 环表示距离城市中心 $3\sim6$ 公里的圈层；以此类推）；d_0 是城市中心的人口密度（单位：万人/平方公里），为 x 环的人口密度（单位：万人/平方公里）；b 为常数；$e=2.71828\cdots$．

下表为某市 2006 年和 2016 年人口分布的相关数据：

年份	d_0	b
2006	2.2	0.13
2016	2.3	0.10

（I）求该市 2006 年 2 环处的人口密度（参考数据：$e^{-0.26}\approx0.77$，结果保留一位小数）；

（II）2016 年该市某环处的人口密度为市中心人口密度的 $\dfrac{2}{3}$，求该环是这个城市的多少环．

（参考数据：$ln2\approx0.7$，$ln3\approx1.1$）

21．（9 分）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：

①对任意实数 x，y，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$；②对任意 $x\in[0,1)$，$f(x)>0$．

（I）求 $f(0)$；

（II）判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性；

（III）若 f（1）$=0$，直接写出 $f(x)$ 的所有零点（不需要证明）．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的．

1．【分析】利用补集的定义直接求解即可．

【解答】解：$\because$ 全集 $U=\{1，2，3，4\}$，$A=\{1，3\}$，

$\therefore \complement_U A=\{2，4\}$，

故选：C．

【点评】本题考查集合的基本运算，属于基础题．

2．【分析】由已知利用任意角的三角函数的定义即可求解．

【解答】解：在直角坐标系 xOy 中，已知 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5},\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，

那么角 α 的终边与单位圆 $\odot O$ 坐标为 $(\dfrac{3}{5}，-\dfrac{4}{5})$．

故选：A．

【点评】本题主要考查了任意角的三角函数的定义，属于基础题．

3．【分析】利用基本不等式即可求出结果．

【解答】解：因为 $x^2+y^2=2$，

则 $2=x^2+y^2 \geqslant 2|xy|$，当且仅当 $|x|=|y|$ 时取等号，

即 $|xy| \leqslant 1$，故最大值为 1．

故选：C．

【点评】本题考查了基本不等式的性质，属于基础题．

4．【分析】讨论 $x>0$ 时，$f(x)$ 的值域；以及 $x \leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调性和函数值的变化趋势，运用排除法可得结论．

【解答】解：当 $x>0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$，$f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$，排除选项 C；

当 $x \leqslant 0$ 时，$f(x)=(\dfrac{1}{2})^x-1$ 递减，排除选项 D；

当 $x \leqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant 0$，且 $x \to -\infty$，$f(x) \to +\infty$，排除选项 A．

故选：B．

【点评】本题考查函数的图象的判断，考查数形结合思想和推理能力，属于基础题．

5．【分析】由已知利用诱导公式，同角三角函数基本关系式即可化简求解．

【解答】解：因为 $\cos 28°=a$，

则 $\cos 62°=\cos(90°-28°)=\sin 28°=\sqrt{1-\cos^2 28°}=\sqrt{1-a^2}$．

故选：C．

【点评】本题主要考查了诱导公式，同角三角函数基本关系式在三角函数求值中的应用，考查了转化思想，属于基础题．

6．【分析】$f(x)=\dfrac{1}{x}-lnx$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数，结合 f（1）>0，f（2）<0，可得答案．

【解答】解：函数的定义域为$(0,+\infty)$，而$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$为减函数，$y=lnx$在$(0,+\infty)$为增函数，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{x}-lnx$在$(0,+\infty)$为减函数，

又$f(1)=1>0, f(2)=\dfrac{1}{2}-ln2=ln\sqrt{e}-ln\sqrt{4}<0$，

所以由零点存在性定理可知，函数$f(x)$在区间$(1,2)$有零点.

故选：B.

【点评】本题主要考查函数零点存在性定理的运用，考查运算求解能力，属于基础题.

7.【分析】利用指数函数，对数函数的单调性，再借助中间量1和0求解即可.

【解答】解：$a=\log_3 4>\log_3 3=1$，

$\because 0<3^{-\frac{1}{3}}<3^0$，$\therefore 0<b<1$，

$c=\log_3 3^{-1}=-1$，

$\therefore c<b<a$，

故选：D.

【点评】本题考查了指数函数，对数函数的单调性，对数的计算公式，属于基础题.

8.【分析】$xy=0\Leftrightarrow x=0$或$y=0$，$x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$，以此可解决此题.

【解答】解：$\because xy=0\Leftrightarrow x=0$或$y=0$，$x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$，

$\therefore$“$xy=0$”是“$x^2+y^2=0$”的必要不充分条件.

故选：B.

【点评】本题考查充分、必要条件的判定，考查数学运算能力及推理能力，属于基础题.

9.【分析】由最小正周期可得ω的值，由最大值、最小值可确定A的值，再代入点$(\dfrac{\pi}{4}$，$2)$，进行运算，即可得解.

【解答】解：由表知，最小正周期$T=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=3$，

最大值为2，最小值为-1，所以$A=2$，

所以$f(x)=2\sin(3x+\varphi)$，

将点$(\dfrac{\pi}{4}$，$2)$代入得，$2=2\sin(3\cdot\dfrac{\pi}{4}+\varphi)$，所以$\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

因为$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，

所以$f(x)=2\sin(3x-\dfrac{\pi}{4})$.

故选：D.

【点评】本题考查三角函数解析式的求法，理解函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$中每个参数的含义是解题的关键，考查逻辑

推理能力和运算能力，属于基础题．

10．【分析】依题意不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，即可得到 $a>0$ 且 $a-b=0$，再根据二次函数的性质计算 $g(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上的单调性，即可得到函数的最值．

【解答】解：因为函数 $f(x)=ln(ax-b)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$，

即不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，

所以 $a>0$ 且 $a-b=0$，即 $a=b>0$，

所以 $g(x)=(ax+b)(x-1)=a(x-1)(x+1)$，

函数开口向上，对称轴为 $x=0$，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{min}=g(0)=-a$，没有最大值，

故选：A．

【点评】本题考查函数的最值，考查学生的逻辑思维能力，属中档题．

二、填空题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分．

11．【分析】利用正弦函数的性质即可求解．

【解答】解：$y=\sin 2x\geqslant -1$，当 $2x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$ 时，即 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z$ 时取等号．

故答案为：-1．

【点评】本题主要考查了正弦函数的性质，属于基础题．

12．【分析】利用幂函数的定义即可求出．

【解答】解：设幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，

$\because$ 幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(2,4)$，

$\therefore 4=2^{a}$，

解得 $a=2$，

$\therefore f(-2)=(-2)^{2}=4$．

故答案为：4．

【点评】本题考查了幂函数的定义与性质的应用问题，熟练掌握幂函数的定义是解题的关键．

13．【分析】由函数的单调性比较大小即可．

【解答】解：$\because$ 函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，且 $f(3+2a)<f$ （2），

$\therefore 3+2a<2$，

解得 $a<-\dfrac{1}{2}$，

故答案为：$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$．

【点评】本题考查了函数的单调性的应用，属于基础题．

14．【分析】利用数形结合的方法，将方程根的问题转化为函数图象交点的问题，观察图象即可得到结果．

【解答】解：作出 $y=f(x)$ 的图象，如下图所示：

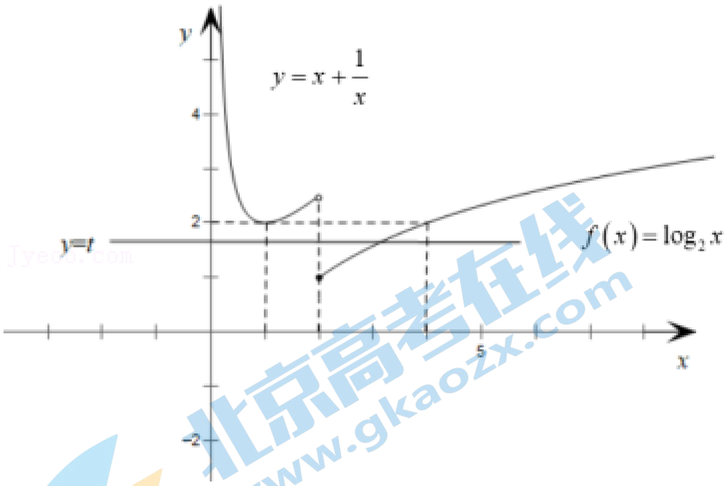
$\because$ 关于 x 的方程 $f(x)=t$ 有且仅有一个实数根，

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=t$ 有且只有一个交点，

由图可知 $1\leqslant t<2$，

则实数 t 的取值范围是 $[1,\ 2)$.

故答案为：$[1,\ 2)$.



【点评】本题考查了数形结合思想及作图能力，难点在于作出函数的图象，属于基础题.

15.【分析】利用奇函数与偶函数的定义即可判断；然后对 $f(x)<\dfrac{1}{a}$ 与 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{a}$ 讨论，分别求出函数 $f_T(x)$ 的范围，由此即可求解.

【解答】解：因为 $|x|+1\geqslant1>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的定义域为 R，关于原点对称，

且 $f(-x)=\log_a(|-x|+1)=\log_a(|x|+1)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数；

因为 $|x|+1\geqslant1$，$a>1$，所以 $f(x)=\log_a(|x|+1)\geqslant0$，

若 $T=\dfrac{1}{a}$，则由题意可得当 $f(x)<\dfrac{1}{a}$ 时，$f_T(x)=f(x)<\dfrac{1}{a}$，故 $0\leqslant f_T(x)<\dfrac{1}{a}$，

当 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{a}$ 时，$f_T(x)=-f(x)\leqslant-\dfrac{1}{a}$，

综上，函数 $f_T(x)$ 的值域为 $(-\infty,-\dfrac{1}{a}]\bigcup[0,\dfrac{1}{a})$.

【点评】本题考查了函数的奇偶性以及函数值域问题，涉及到分类讨论思想的应用，考查了学生的运算转化能力，属于中档题.

三、解答题共 6 小题，共 55 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.【分析】（1）求出 B 集合，然后再求交集即可；（2）利用集合的运算，列出不等式即可求得 m 的取值范围.

【解答】解：（I）当 $m=4$ 时，集合 $B=\{x\,|\,m-1\leqslant x\leqslant m+1,\ m\in R\}=\{x\,|\,3\leqslant x\leqslant5\}$，

又 $A=\{x\,|\,x\leqslant4\}$，

所以 $A\bigcap B=\{x\,|\,3\leqslant x\leqslant4\}=[3,\ 4]$.

（II）若 $A\bigcap B=\varnothing$，

则 $m-1>4$，

解得 $m>5$，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围 $(5,+\infty)$.

【点评】本题主要考查了集合交集的运算，考查了计算能力，属于基础题.

17.【分析】(I) 根据 f （1）$=0$，代入求出参数 a 的值，再解一元二次不等式即可；

（II）首先由 f （1）$=2$ 求出 a 的值，再根据二次函数的性质求出函数在给定区间上的最值；

（III）参变分离可得 $-a<x+\frac{4}{x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，再利用基本不等式求出 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值，即可得解；

【解答】解：(I) 因为 $f(x)=x^2+ax+4$ 且 f （1）$=0$，所以 $a+5=0$，解得 $a=-5$，

所以 $f(x)=x^2-5x+4$，

由 $f(x)\leqslant 0$，得 $f(x)=x^2-5x+4\leqslant 0$，即 $(x-4)(x-1)\leqslant 0$，解得 $1\leqslant x\leqslant 4$，

即原不等式的解集为 $[1，\ 4]$；

（II）因为 f （1）$=2$，所以 $a+5=2$，所以 $a=-3$，

所以 $f(x)=x^2-3x+4=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$，

因为 $x\in[-2，\ 2]$，

所以函数在 $[-2，\ \frac{3}{2}]$ 上单调递减，在 $(\frac{3}{2}，\ 2]$ 上单调递增，

所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时函数取得最小值 $f(x)_{min}=f(\frac{3}{2})=\frac{7}{4}$；当 $x=-2$ 时函数取得最大值 $f(x)_{max}=f(-2)=14$；

（III）因为对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)>0$ 恒成立，

即对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $x^2+ax+4>0$ 恒成立，

即 $-a<x+\frac{4}{x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

因为 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等号；

所以 $-a<4$，即 $a>-4$，

所以 $a\in(-4,+\infty)$.

【点评】本题考查了一元二次不等式的解法及二次函数的最值，难点在于第（III）问中将问题转化为求 $x+\frac{4}{x}$ 的最值.

18.【分析】由最小正周期为 π，可得 $\omega=2$，

选择条件①：

（I）由 $2\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$，结合 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，即可得解；

选择条件②：

（I）由 $2\cdot\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，即可得解；

（II）结合正弦函数的单调性，即可得解.

【解答】解：因为函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

选择条件①：

（I）因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称，

所以 $2\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in Z$，所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．

选择条件②：

（I）因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，

所以 $2\cdot\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in Z$，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

故 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．

（II）令 $2x+\frac{\pi}{3}\in[2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，$k\in Z$，

所以 $x\in[k\pi-\frac{5\pi}{12}$，$2k\pi+\frac{\pi}{12}]$，$k\in Z$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{5\pi}{12}$，$2k\pi+\frac{\pi}{12}]$，$k\in Z$．

【点评】本题考查三角函数的图象与性质，熟练掌握正弦函数的周期性、单调性和对称性是解题的关键，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题．

19．【分析】（I）由复合函数单调性可判断 $f(x)$ 在区间 $[0$，$+\infty)$ 上单调递减，再利用定义证明即可；

（II）函数 $g(x)=f(x)-k(k$ 为常数）的零点即方程 $f(x)-k=0(k$ 为常数）的解，从而解方程，根据方程的解确定 k 的取值范围即可．

【解答】解：（I） $f(x)$ 在区间 $[0$，$+\infty)$ 上单调递减，证明如下，

任取 x_1，$x_2\in[0$，$+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{x_1^2+1}-\frac{2}{x_2^2+1}$

$=\frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$，

$\because 0\leqslant x_1<x_2$，

$\therefore x_2-x_1>0$， $x_2+x_1>0$， $x_1^2+1>0$， $x_2^2+1>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

故 $f(x)$ 在区间 $[0，+\infty)$ 上单调递减；

（II）函数 $g(x)=f(x)-k(k$ 为常数）的零点即方程 $f(x)-k=0(k$ 为常数）的解，

解方程 $\dfrac{2}{x^2+1}-k=0$ 得， $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{k}-1}(0<k<2)$，

$\because x_1<x_2$， $x_1<-\sqrt{3}$，

$\therefore -\sqrt{\dfrac{2}{k}-1}<-\sqrt{3}$，故 $0<k<\dfrac{1}{2}$，

故 k 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2})$．

【点评】本题考查了函数性质的判断与证明及函数的零点与方程的根的关系应用，属于中档题．

20．【分析】(I) 结合 $d_x=d_0e^{-bx}$ 公式，以及 2006 年 $d_0=2.2$， $b=0.13$，可求得 $d_x=2.2e^{-0.13x}$，将 $x=2$ 代入上式，即可求解．

(II) 根据已知条件，结合对数函数的公式，即可求解．

【解答】解：$(I)\because d_x=d_0e^{-bx}$ 且 2006 年 $d_0=2.2$， $b=0.13$，

$\therefore d_x=2.2e^{-0.13x}$，

当 $x=2$ 时， $d_x=2.2e^{-0.26}\approx 2.2\times 0.7\approx 1.7$，

故该市 2006 年 2 环处的人口密度为 1.7．

(II)2016 年 $d_x=2.3e^{-0.1x}$ ①，

$\because$ 2016 年该市某环处的人口密度为市中心人口密度的 $\dfrac{2}{3}$，

$\therefore d_x=\dfrac{2}{3}d_0=\dfrac{2}{3}\times 2.3$ ②，

联立①②可得， $e^{-0.1x}=\dfrac{2}{3}$，两边同时取对数可得， $-0.1x=ln2-ln3\approx 0.7-1.1=-0.4$，解得 $x=4$，

故该环是这个城市的 4 环．

【点评】本题主要考查函数的实际应用，掌握对数函数的公式是解本题的关键，属于基础题．

21．【分析】（I）令 $x=0$， $y=0$，即可求解 $f(0)$；

（II） $f(x)$ 是偶函数，令 $x=0$， y 为任意实数，可得 $f(-y)=f(y)$，即可得证；

（III）若 f （1）$=0$，根据已知条件可得 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，由偶函数的性质可得 $f(-1)=0$，从而可得 $f(x)$ 的所有零点．

【解答】解：（I）令 $x=0$， $y=0$，则 $f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$，

可得 $f(0)[f(0)-1]=0$，因为对任意 $x\in[0，1)$， $f(x)>0$，

所以 $f(0)=1$．

（II） $f(x)$ 是偶函数，证明如下：

令 $x=0$， y 为任意实数，则 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$，

即 $f(-y)=f(y)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

（III）若 f （1） $=0$，令 $y=0$，则 $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)f$ （1） $=0$，

即 $f(x+1)=-f(x-1)$，

则 $f(x+2)=-f(x)$， $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

又 $f(-1)=f$ （1） $=0$，

所以 $f(x)$ 的所有零点为 $2n+1$， $n\in Z$.

【点评】本题考查抽象函数及其应用，考查奇偶性与周期性的判断，考查赋值法的应用，属于中档题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。