

数 学 试 卷

2023 · 1

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知直线 $l: x + y - 2 = 0$ ，则直线 l 的倾斜角为

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

(2) 已知 $\mathbf{a} = (x, 1, -2)$ ， $\mathbf{b} = (2, y, 1)$ ，且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ，则 $xy =$

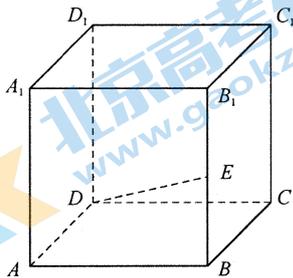
- (A) $-\frac{9}{2}$ (B) 2 (C) -2 (D) 8

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点坐标为

- (A) $(-5, 0)$ (B) $(3, 0)$ (C) $(4, 0)$ (D) $(5, 0)$

(4) 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ， $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$ ，点 E 是 BB_1 的中点，则 $\overrightarrow{DE} =$

- (A) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 (B) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 (C) $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 (D) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$



(5) 在 $(x - 3)^5$ 的展开式中， x^3 的系数为

- (A) -270 (B) -90 (C) 90 (D) 270

(6) 设 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，下列命题中正确的是

- (A) 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 $m \parallel n$
 (B) 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$
 (C) 若 $m \parallel n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
 (D) 若 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$

(7) “ $m=2$ ”是“双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 已知直线 $l: y = kx - 1$ 与曲线 $C: y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ 有公共点, 则实数 k 的取值范围是

- (A) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (B) $[-2, 2]$
(C) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

(9) 某社区征集志愿者参加为期5天的“垃圾分类, 全民行动”的宣传活动, 要求志愿者每人只参加一天且每天至多安排一人. 现有甲、乙、丙3人报名, 甲要求安排在乙、丙的前面参加活动, 那么不同的安排方法共有

- (A) 18种 (B) 20种 (C) 24种 (D) 30种

(10) 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的八条棱长均为4, S 是四边形 $ABCD$ 及其内部的点构成的集合. 设集合 $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 3\}$, 则 T 表示的区域的面积为

- (A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) π (C) 2π (D) 3π

第二部分 (非选择题 共100分)

二、填空题共6小题, 每小题5分, 共30分.

(11) 已知直线 $l_1: ax + 2y + 1 = 0$, $l_2: x - 3y + 1 = 0$. 若 $l_1 \perp l_2$, 则实数 $a =$ _____.

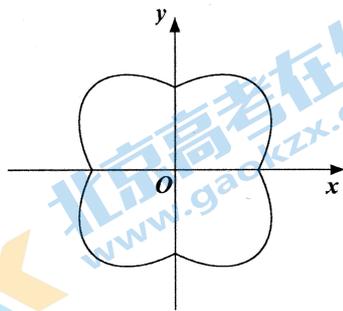
(12) 从0, 2中选一个数字, 从1, 3, 5中选两个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中偶数共有_____个. (用数字作答)

(13) 若 $(1 + 2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_1 + a_3 =$ _____. (用数字作答)

(14) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $AB \perp AC$, $PA = 1$, $AB = AC = 2$, 则异面直线 PC 与 AB 所成角的大小为_____; 点 A 到平面 PBC 的距离为_____.

(15) 已知双曲线 C 经过点 $(1, 4)$, 离心率为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线 C 的标准方程为_____;
其焦距为_____.

(16) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 $G: x^2 + y^2 = 4 + |xy|$ 就是其中之一（如图）. 给出下列四个结论：



- ①曲线 G 有且仅有四条对称轴；
 - ②曲线 G 上任意两点之间的距离的最大值为 6；
 - ③曲线 G 恰好经过 8 个整点（即横坐标、纵坐标均为整数的点）；
 - ④曲线 G 所围成的区域的面积大于 16.
- 其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 14 分)

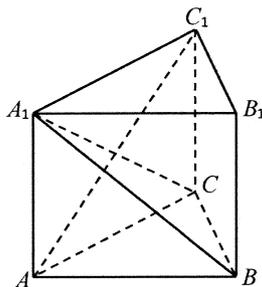
已知圆 C 的圆心坐标为 $C(1,0)$ ，且经过点 $P(0, \sqrt{3})$.

- (I) 求圆 C 的标准方程；
- (II) 若过点 P 作圆 C 的切线 l 与 x 轴交于点 M ，求直线 l 的方程及 $\triangle PCM$ 的面积.

(18) (本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $C_1C \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $CA = CC_1 = CB = 1$.

- (I) 求证： $AC_1 \perp$ 平面 A_1BC ；
- (II) 求直线 C_1C 与平面 A_1BC 所成角的大小.



(19) (本小题 14 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $(1, 2)$.

(I) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(II) 设 $M(1, 4)$, 直线 $l: y = x + b$ 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B . 若 $\triangle MAB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形, 求证: 直线 l 经过抛物线 C 的焦点.

(20) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DP = 2$, 点 M 在棱 PC 上, 且 $PA \parallel$ 平面 BDM .

(I) 求证: M 是棱 PC 的中点;

(II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(i) 二面角 $M-BD-C$ 的余弦值;

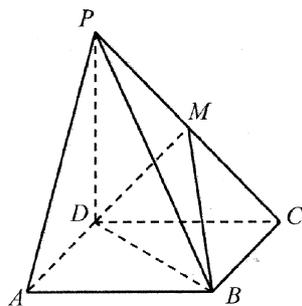
(ii) 在棱 PA 上是否存在点 Q , 使得 $BQ \perp$ 平面 BDM ?

若存在, 求出 $\frac{PQ}{PA}$ 的值; 若不存在, 说明理由.

条件①: $\angle BAD = 60^\circ$;

条件②: $BD = 2$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.



(21) (本小题 14 分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $P(1, 0)$ 作与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 G 于点 M, N (点 M 在 x 轴的上方).

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 若线段 MN 的长等于 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$, 求直线 l 的方程;

(III) 设直线 A_1M, A_2N 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试判断 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值? 若是定值, 求出这个定值, 并加以证明; 若不是定值, 说明理由.

(18) (共 14 分)

解: (I) 因为 $C_1C \perp$ 平面 ABC , $CA = CC_1$,

所以 ACC_1A_1 是正方形. 所以 $AC_1 \perp A_1C$2 分

因为 $C_1C \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $C_1C \perp BC$3 分

因为 $AC \perp BC$, $C_1C \cap AC = C$,

所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_15 分

因为 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $AC_1 \perp BC$6 分

因为 $A_1C \cap BC = C$,

所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BC7 分

(II) 方法一:

因为 $C_1C \perp$ 平面 ABC ,

所以 $C_1C \perp AC, C_1C \perp BC$8 分

如图建立空间直角坐标系 $C - xyz$, 则 $C(0,0,0), B(0,1,0), A_1(1,0,1), C_1(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{CA_1} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{CB} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0,0,1)$9 分

设平面 A_1BC 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = y = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = -z, \\ y = 0. \end{cases}$$

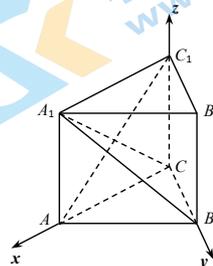
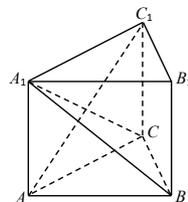
令 $z = -1$, 则 $x = 1$.

于是 $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$11 分

设直线 CC_1 与平面 A_1BC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{CC_1} \rangle = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CC_1}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{CC_1}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以直线 CC_1 与平面 A_1BC 所成角为 $\frac{\pi}{4}$14 分



方法二：(II) 由 (I) 知, $AC_1 \perp$ 平面 A_1BC ,

所以 $\angle C_1CA_1$ 即为直线 C_1C 与平面 A_1BC 所成角.10 分

又因为 ACC_1A_1 为正方形,

所以 $\triangle C_1CA_1$ 为等腰直角三角形.12 分

所以 $\angle C_1CA_1 = \frac{\pi}{4}$.

所以直线 C_1C 与平面 A_1BC 所成角为 $\frac{\pi}{4}$14 分

(19) (共 14 分)

解：(I) 由题意得 $p=2$2 分

所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$4 分

所以抛物线的准线方程为 $x = -1$5 分

(II) 依题意由 $\begin{cases} y = x + b, \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $x^2 + (2b-4)x + b^2 = 0$6 分

由 $\Delta = 16 - 16b > 0$, 得 $b < 1$7 分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 4 - 2b$8 分

所以 $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + 2b = 4$9 分

所以 AB 的中点坐标 $D(2-b, 2)$10 分

因为 $\triangle MAB$ 为等腰三角形,

所以 $MD \perp AB$11 分

所以 $\frac{2}{b-1} = -1$, 解得 $b = -1$12 分

所以直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$13 分

因为抛物线的焦点坐标是 $(1, 0)$,

所以直线 l 经过抛物线 C 的焦点.14 分

(20) (共 14 分)

解：(I) 证明：如图, 连接 AC 交 BD 于点 N , 连接 MN1 分

因为 $PA \parallel$ 平面 BDM , $PA \subset$ 平面 PAC ,

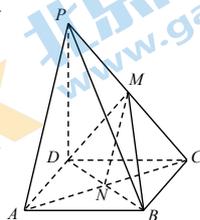
平面 $PAC \cap$ 平面 $BDM = MN$,

所以 $PA \parallel MN$3分

因为底面 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 N 是 AC 的中点,

所以 M 是 PC 的中点.5分



(II) 选择条件①: $\angle BAD = 60^\circ$.

(i) 取 AB 的中点 E , 连接 DE .

因为底面 $ABCD$ 是平行四边形, $DA = DC$,

$\angle BAD = 60^\circ$,

所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形.

所以 $DE \perp AB$6分

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 则

$A(\sqrt{3}, -1, 0), B(\sqrt{3}, 1, 0), M(0, 1, 1), P(0, 0, 2)$,

所以 $\overrightarrow{DB} = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{DM} = (0, 1, 1)$7分

设平面 BDM 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM} = y + z = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y = -\sqrt{3}x, \\ z = \sqrt{3}x. \end{cases}$$

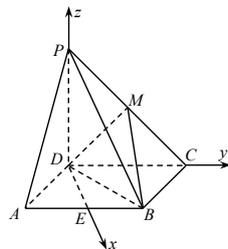
令 $x = 1$, 则 $y = -\sqrt{3}, z = \sqrt{3}$. 于是 $\mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$8分

因为 $PD \perp$ 底面 BCD ,

所以平面 BCD 的法向量 $\overrightarrow{DP} = (0, 0, 2)$9分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{DP}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

由题知, 二面角 $M-BD-C$ 为锐角, 所以其余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$10分



选择条件②: $BD = 2$.

(i) 取 AB 的中点 E , 连接 DE .

因为 $DA = DC = BD = 2$,

所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形.

所以 $DE \perp AB$6分

以下同选条件①.10分

(ii) 假设在棱 PA 上存在点 $Q(x, y, z)$, 且 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PA}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$),

则 $(x, y, z-2) = \lambda(\sqrt{3}, -1, -2)$11分

所以 $Q(\sqrt{3}\lambda, -\lambda, 2-2\lambda)$.

所以 $\overline{BQ} = (\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, -\lambda - 1, 2 - 2\lambda)$12分

因为 $BQ \perp$ 平面 BDM , 平面 BDM 的法向量 $n = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

所以 $\frac{\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}}{1} = \frac{-\lambda - 1}{-\sqrt{3}} = \frac{2 - 2\lambda}{\sqrt{3}}$13分

因为此方程组无实根, 所以不存在点 Q 使得 $BQ \perp$ 平面 BDM14分

(21) (共 14 分)

解: (I) 由题设,
$$\begin{cases} a^2 = 4, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 2, \\ c^2 = 2. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$4分

(II) 当直线 l 的斜率不存在时, $M(1, \frac{\sqrt{6}}{2}), N(1, -\frac{\sqrt{6}}{2})$.

所以 $|MN| = \sqrt{6} \neq \frac{4\sqrt{5}}{3}$, 不合题意.5分

当直线 l 的斜率存在时, 设 $l: y = k(x-1)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立方程组
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = k(x-1) \end{cases}$$
 消去 y 得 $x^2 + 2k^2(x-1)^2 = 4$.

整理得 $(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$.

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2k^2 - 4}{2k^2 + 1}$6分

由 $\Delta = 16k^4 - 4(2k^2 + 1)(2k^2 - 4) = 8(2 + 3k^2) > 0$,7分

$$\begin{aligned} \text{所以 } |MN| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{8(2+3k^2)}}{2k^2+1} = \frac{4\sqrt{5}}{3}. \end{aligned}$$

所以 $13k^4 - 5k^2 - 8 = 0$. 所以 $(k^2 - 1)(13k^2 + 8) = 0$.

解得 $k = \pm 1$8 分

综上, 所求直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$9 分

(III) 由题意得 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$.

① 当直线 l 的斜率不存在时, $M(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, $N(1, -\frac{\sqrt{6}}{2})$,

此时都有 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$10 分

② 当直线 l 的斜率存在时, 设 $l: y = k(x-1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

所以直线 A_1M 的斜率 $k_1 = \frac{y_1}{x_1+2} = \frac{k(x_1-1)}{x_1+2}$,

直线 A_2N 的斜率 $k_2 = \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{k(x_2-1)}{x_2-2}$11 分

所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_1+2)(x_2-1)} = \frac{x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 2}{x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2}$

因为 $\frac{k_1}{k_2} - \frac{1}{3} = \frac{3(x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 2) - (x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2)}{3(x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2)}$

$$= \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{3(x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2)} = \frac{4k^2 - 8}{2k^2 + 1} - \frac{20k^2}{2k^2 + 1} + 8 = \frac{4k^2 - 8 - 20k^2 + 16k^2 + 8}{2k^2 + 1} = 0. \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$.

综上, $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$14 分

备注： 所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_1+2)(x_2-1)} = \frac{x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 2}{x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2k^2-4}{2k^2+1} - 2x_1 - (\frac{4k^2}{2k^2+1} - x_1) + 2}{\frac{2k^2-4}{2k^2+1} + 2(\frac{4k^2}{2k^2+1} - x_1) - x_1 - 2} \\ &= \frac{\frac{2k^2-2}{2k^2+1} - x_1}{\frac{6k^2-6}{2k^2+1} - 3x_1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

综上, $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$14分

解法 2:

(II) 由题意设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 且 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$5分

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ x = my + 1. \end{cases}$ 消去 x , 得 $(my+1)^2 + 2y^2 = 4$,

整理得 $(m^2+2)y^2 + 2my - 3 = 0$.

因为 $\Delta = 8(2m^2+3) > 0$6分

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2+2}$, $y_1y_2 = -\frac{3}{m^2+2}$,7分

因为 $|MN| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
 $= \sqrt{m^2+1}|y_1-y_2| = \sqrt{m^2+1} \cdot \frac{2\sqrt{4m^2+6}}{m^2+2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$,

解得 $m = \pm 1$8分

综上, 所求直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$9分

(III) 由题意可知 $2my_1y_2 = 3(y_1 + y_2)$.

直线 AM 的斜率 $k_1 = \frac{y_1}{x_1+2} = \frac{y_1}{my_1+3}$,

直线 A_2N 的斜率 $k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_2}{my_2 - 1}$,11分

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{my_1 + 3}}{\frac{y_2}{my_2 - 1}} = \frac{y_1(my_2 - 1)}{y_2(my_1 + 3)} = \frac{my_1y_2 - y_1}{my_1y_2 + 3y_2}$$

$$= \frac{2my_1y_2 - 2y_1}{2my_1y_2 + 6y_2} = \frac{3(y_1 + y_2) - 2y_1}{3(y_1 + y_2) + 6y_2} = \frac{y_1 + 3y_2}{3y_1 + 9y_2} = \frac{1}{3}. \quad \text{.....14分}$$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯