

2024 年 1 月“九省联考”考后提升卷

高三数学

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 现有一组数据: 663, 664, 665, 668, 671, 664, 656, 674, 651, 653, 652, 656, 则这组数据的第 85 百分位数是()

- A. 652 B. 668 C. 671 D. 674

【答案】C

【解析】

【分析】根据百分位数的定义, 求得 $12 \times 85\% = 10.2$, 即可确定第 85 百分位数为第 11 个数, 可得答案。

【详解】由题意这组数共 12 个, 则 $12 \times 85\% = 10.2$,
将这组数据从小到大排列为 651, 652, 653, 656, 656, 663, 664, 664, 665, 668, 671, 674,
故这组数据的第 85 百分位数为第 11 个数, 即 671, 故选: C

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点、右顶点、左焦点恰好是等腰三角形的三个顶点, 则椭圆 C 的离心率为()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

2.【答案】D【解析】易知等腰三角形的三边为 $a, a+c, \sqrt{a^2+b^2}$; 则 $a+c=\sqrt{a^2+b^2}$ 即有 $a^2 -$

$$2ac - 2c^2 = 0, \text{解得 } c = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{故选: D.}$$

3.已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_n = (-1)^n a_n - 2^{-n}$, 则 $S_5 + S_6 = ()$

A. $-\frac{1}{64}$

B. $-\frac{1}{32}$

C. $-\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{64}$

【答案】A

【解析】

【分析】由题, 当 $n=1$ 时, $a_1 = -\frac{1}{4}$, 当 $n \geq 2$ 时 $a_n = (-1)^n a_n + (-1)^n a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$, 进而分奇偶性讨论得 $a_n = \frac{1}{2^n}$, n 为正偶数, $a_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$, n 为正奇数, 再求和即可.

【详解】解: 因为 $S_n = (-1)^n a_n - 2^{-n}$,

所以, 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = -a_1 - 2^{-1}$, 解得 $a_1 = -\frac{1}{4}$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-1)^n a_n - 2^{-n} - (-1)^{n-1} a_{n-1} + 2^{-n+1} = (-1)^n a_n + (-1)^n a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$,

所以, 当 n 为偶数时, $a_{n-1} = -\frac{1}{2^n}$, $n \geq 2$, 故 $a_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$, n 为正奇数;

当 n 为奇数时, $2a_n = -a_{n-1} + \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}$, 即 $a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$, 故 $a_n = \frac{1}{2^n}$, n 为正偶数;

所以 $S_5 + S_6 = 2S_5 + a_6 = 2\left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6}\right) + \frac{1}{2^6} = -\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}$,

故选: A

4.已知 m, n 为异面直线, 直线 l 与 m, n 都垂直, 则下列说法不正确的是()

A. 若 $l \perp$ 平面 α , 则 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$

B. 存在平面 α , 使得 $l \perp \alpha, m \subset \alpha, n \parallel \alpha$

C. 有且只有一对互相平行的平面 α 和 β , 其中 $m \subset \alpha, n \subset \beta$

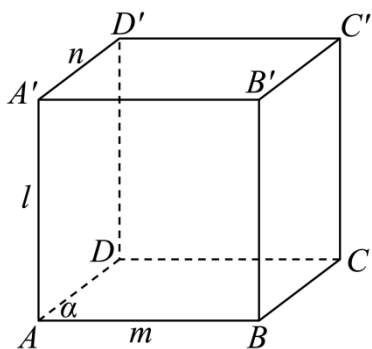
D. 至少存在两对互相垂直的平面 α 和 β , 其中 $m \subset \alpha, n \subset \beta$

【答案】A

【分析】由线面关系判断 ABD; 由线面垂直判定判断 C;

【详解】对于 A, 如下图所示, 在正方体中取 l 为 AA' , AB 为 m , $A'D'$ 为 n , 平面 $ABCD$ 为平面

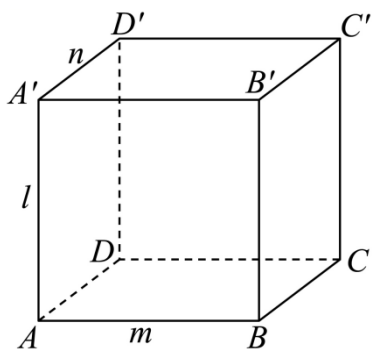
α ，则 $n \parallel \alpha$ ， $m \subset \alpha$ ，故 A 错误；



对于 B，在正方体中取 l 为 AA' ， AB 为 m ， $A'D'$ 为 n ，平面 $ABCD$ 为平面 α ，此时 $l \perp \alpha$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \parallel \alpha$ ，故 B 正确；

对于 C，由线面垂直的判定可知， $l \perp \alpha$ ， $l \perp \beta$ ，过直线 n 且与 l 垂直的平面只有一个，过直线 m 且与 l 垂直的平面只有一个，则有且只有一对互相平行的平面 α 和 β ，其中 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，故 C 正确；

对于 D，在正方体中取 l 为 AA' ， AB 为 m ， $A'D'$ 为 n ，此时平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADD'A'$ ，平面 $ABB'A' \perp$ 平面 $ADD'A'$ ，即至少存在两对互相垂直的平面 α 和 β ，其中 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，故 D 正确



故选：A.

5. 某学校举办运动会，径赛类共设 100 米、200 米、400 米、800 米、1500 米 5 个项目，田赛类共设铅球、跳高、跳远、三级跳远 4 个项目. 现甲、乙两名同学均选择一个径赛类项目和一个田赛类项目参赛，则甲、乙的参赛项目有且只有一个相同的方法种数等于()

- A. 70 B. 140 C. 252 D. 504

【答案】B

【分析】由分类加法、分步乘法计数原理以及排列组合的计算即可得解.

【详解】由题意若甲、乙的相同的参赛项目为径赛类项目，则有 $C_5^1 = 5$ 种选法，

他们再分别从田赛类项目中各选一个（互不相同）即可，这时候有 $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ 种选法，

所以此时满足题意的选法有 $C_5^1 A_4^2 = 5 \times 12 = 60$,

由题意若甲、乙的相同的参赛项目为田赛类项目, 则有 $C_4^1 = 4$ 种选法,

他们再分别从径赛类项目中各选一个(互不相同)即可, 这时候有 $A_5^4 = 5 \times 4 = 20$ 种选法,

所以此时满足题意的选法有 $C_4^1 A_5^2 = 4 \times 20 = 80$,

综上所述, 甲、乙的参赛项目有且只有一个相同的方法种数等于 $60 + 80 = 140$ 种. 故选: B.

6. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 在侧面 CC_1D_1D (含边界) 内运动, Q 在底面 $ABCD$ (含边界) 内运动, 则下列说法不正确的是 ()

A. 若直线 BP 与直线 AD 所成角为 30° , 则 P 点的轨迹为圆弧

B. 若直线 BP 与平面 $ABCD$ 所成角为 30° , 则 P 点的轨迹为双曲线的一部分

C. 若 $|D_1Q| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 Q 点的轨迹为线段

D. 若 Q 到直线 DD_1 的距离等于 Q 到平面 ABB_1A_1 的距离, 则点 Q 的轨迹为抛物线的一部分

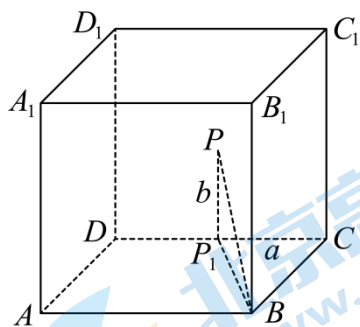
【答案】C

【解析】

【分析】画出正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 根据各选项的不同条件对图形进行分析并运算即可得出轨迹问题的结论.

【详解】直线 BP 与直线 AD 所成角即为 $\angle PBC$, 在 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中, $\tan 30^\circ = \frac{CP}{BC}$, $\therefore CP = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 P 在以 C 为圆心, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆落在侧面 CC_1D_1D 内的圆弧上, A 正确;

过 P 作 $PP_1 \perp DC$ 于点 P_1 (如图), 设 $P_1C = a$, $P_1P = b$, 直线 BP 与平面 $ABCD$ 所成角即为 $\angle PBP_1$,



在 $\text{Rt}\triangle PBP_1$ 中, $\tan \angle PBP_1 = \frac{PP_1}{BP_1} = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而 $3b^2 - a^2 = 1$, 故点 P 的轨迹为双曲线的一部

分，故 B 正确；

在 $\text{Rt}\triangle D_1DQ$ 中， $|D_1Q| = \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{DD_1^2 + DQ^2}$ ，从而 $|DQ| = \frac{1}{2}$ ，故 Q 在以 D 为圆心， $\frac{1}{2}$ 为半径的圆落在底面 $ABCD$ 内的圆弧上，C 错误；

Q 到直线 DD_1 的距离等于 Q 到平面 ABB_1A_1 的距离，即 Q 到点 D 的距离等于 Q 到直线 AB 的距离，故点 Q 的轨迹为抛物线的一部分，故 D 正确。

故选：C.

7. 已知角 β 的终边上一点 P 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$ ，则 $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为()

A. 0

B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】根据三角函数的定义求出 $\tan \beta$ ，再根据两角和的正切公式展开代入化简求解。

【详解】角 β 的终边上一点 P 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$

所以 $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $\tan\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \beta - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \beta \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ，故选：B

8. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，点 P 为双曲线渐近线上一点，

若 $PF_1 \perp PF_2$ ， $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{1}{3}$ ，则双曲线 Γ 的离心率为 ()

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\sqrt{2}$

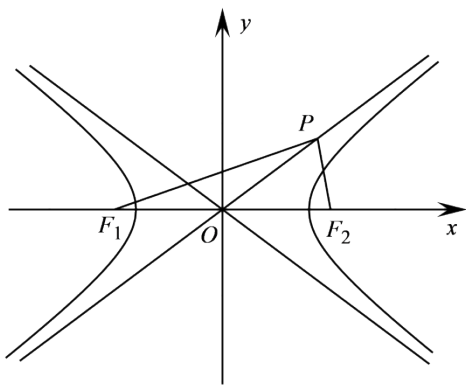
D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由题可得 $\angle POF_2 = 2\angle PF_1F_2$ ，然后利用二倍角公式结合条件可得 $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ ，然后根据离心率公式即得。

【详解】因为 $PF_1 \perp PF_2$ ， O 为 F_1F_2 的中点，



所以 $|F_1O| = |OP|$, $\angle PF_1F_2 = \angle F_1PO$,

所以 $\angle POF_2 = 2\angle PF_1F_2$, 又 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{1}{3}$, $\tan \angle POF_2 = \frac{b}{a}$,

所以 $\frac{b}{a} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$.

故选: B.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到 $g(x)$ 的图象, 则 ()

A. 函数 $g(x - \frac{\pi}{3})$ 是偶函数

B. $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点

C. 函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增

D. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称

【答案】BCD

【解析】

【分析】首先求出 $g(x)$ 的解析式, 然后根据正弦函数的性质逐一判断即可.

【详解】将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$,

再将图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），可得 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，

对于 A 选项，令 $h(x) = g\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

则 $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ ， $h\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$ ，故函数 $g\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 不是偶函数，A 不正确；

对于 B 选项，因为 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin 0 = 0$ ，故 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点，B 正确；

对于 C 选项，当 $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ，所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，

C 正确；

对于 D 选项，因为对称轴满足 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

则 $k=0$ 时， $x = \frac{\pi}{12}$ ，所以函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称，D 正确。

故选：BCD.

10. 已知 z_1 与 z_2 是共轭复数，以下四个命题一定是正确的是（ ）

A. $z_1^2 = |z_1|^2$

B. $z_1 z_2 = |z_2|^2$

C. $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$

D. $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$

【答案】BC

【分析】设 $z_1 = a + bi, z_2 = a - bi, a, b \in \mathbb{R}$ ，分别求出 $z_1^2, |z_1|^2$ ，得到 A 不正确；根据复数的运算，可得 B 正确；根据 $z_1 + z_2 = 2a \in \mathbb{R}$ ，可得 C 正确；根据复数的除法运算，可得 D 不一定正确，即可求解。

【详解】设 $z_1 = a + bi, z_2 = a - bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ，

则 $z_1^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ ， $|z_1|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$ ，所以 A 不正确；

又由 $z_1 z_2 = a^2 + b^2$ ， $|z_2|^2 = a^2 + b^2$ ，所以 $z_1 z_2 = |z_2|^2$ ，所以 B 正确；

由 $z_1 + z_2 = 2a \in \mathbb{R}$ ，所以 C 正确；

由 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)^2}{(a - bi)(a + bi)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$ 不一定是实数，所以 D 不一定正确。

故选：BC

11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x + \frac{7}{2}\right) + f(x) = 0$ ，且 $y = f\left(x - \frac{7}{4}\right)$ 为奇函数，则下列说法一定正确的是（ ）

- A. 函数 $f(x)$ 的周期为 $\frac{7}{2}$
- B. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(-\frac{7}{4}, 0)$ 对称
- C. 函数 $f(x)$ 为偶函数
- D. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{7}{4}$ 对称

【答案】BC

【解析】

【分析】由 $f(x + \frac{7}{2}) + f(x) = 0$ 得函数 $f(x)$ 的一个周期，由 $y = f(x - \frac{7}{4})$ 是奇函数得函数的对称中心，两条件结合得函数 $f(x)$ 的奇偶性。

【详解】由 $f(x + \frac{7}{2}) + f(x) = 0$ ，得 $f(x + \frac{7}{2}) = -f(x)$ ，

将 $x + \frac{7}{2}$ 代入， $f(x + \frac{7}{2} + \frac{7}{2}) = -f(x + \frac{7}{2}) = -[-f(x)]$ ，即 $f(x + 7) = f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 7，A 项错误；

由 $y = f(x - \frac{7}{4})$ 是奇函数得 $f(-x - \frac{7}{4}) = -f(x - \frac{7}{4})$ ，

因为 $f(x + \frac{7}{2}) = -f(x)$ 和 $f(-x - \frac{7}{4}) = -f(x - \frac{7}{4})$ ，

所以 $f(x - \frac{7}{4} + \frac{7}{2}) = -f(x - \frac{7}{4}) = f(-x - \frac{7}{4}) = -f(-x - \frac{7}{4} + \frac{7}{2})$ ，

即 $f(x + \frac{7}{4}) = -f(-x + \frac{7}{4})$ ，所以 $f(x)$ 的图象关于 $(-\frac{7}{4}, 0)$ 中心对称，B 项正确，D 项错误；

因为 $f(-x - \frac{7}{4}) = -f(x - \frac{7}{4})$ ， $f(x + \frac{7}{2}) = -f(x)$ ，

所以 $f(-x - \frac{7}{4}) = -f(x - \frac{7}{4}) = f(x - \frac{7}{4} + \frac{7}{2}) = f(x + \frac{7}{4})$ ，将 $x - \frac{7}{4}$ 代入，

得 $f(-x) = f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 为偶函数，C 项正确。

故选：BC。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知集合 $A = \{x | \frac{x+1}{x-2} \leq 0\}$ ， $B = \{x | x < a\}$ ，若 $A \cap B \neq \emptyset$ ，且 $A \cup B \neq B$ ，则实数 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $(-1, 2)$

【解析】

【分析】先解分式不等式，即可得出集合 A ，再由 $A \cap B \neq \emptyset$ ，且 $A \cup B \neq B$ ，即可求出实数 a 的取值范围.

【详解】由 $\frac{x+1}{x-2} \leq 0$ 可得： $\begin{cases} (x+1)(x-2) \leq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ ，解得： $-1 \leq x < 2$ ，

所以 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$ ，

因为 $A \cap B \neq \emptyset$ ，且 $A \cup B \neq B$ ，

所以 $a \in (-1, 2)$.

故答案为： $(-1, 2)$.

13. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π ，侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$ ，体积

分别为 $V_{\text{甲}}$ 和 $V_{\text{乙}}$. 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} =$ _____

【答案】 $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

【分析】设母线长为 l ，甲圆锥底面半径为 r_1 ，乙圆锥底面圆半径为 r_2 ，根据圆锥的侧面积公式可得 $r_1 = \frac{3}{2}r_2$ ，再结合圆心角之和可将 r_1, r_2 分别用 l 表示，再利用勾股定理分别求出两圆锥的高，再根据圆锥的体积公式即可得解.

【详解】解：设母线长为 l ，甲圆锥底面半径为 r_1 ，乙圆锥底面圆半径为 r_2 ，

则 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$ ，所以 $r_1 = \frac{3}{2}r_2$ ，

又 $\frac{2\pi r_1}{l} + \frac{2\pi r_2}{l} = 2\pi$ ，则 $\frac{r_1 + r_2}{l} = 1$ ，所以 $r_1 = \frac{3}{5}l, r_2 = \frac{2}{5}l$ ，

所以甲圆锥的高 $h_1 = \sqrt{l^2 - \frac{9}{25}l^2} = \frac{4}{5}l$ ，

乙圆锥的高 $h_2 = \sqrt{l^2 - \frac{4}{25}l^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}l$ ，

所以 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{\frac{4}{25}l^2 \times \frac{\sqrt{21}}{5}l}{\frac{9}{25}l^2 \times \frac{4}{5}l} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = -\frac{1}{2}$, $a_1 = -2, a_2 = \frac{1}{4}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项积的最大值为_____

【答案】1

【分析】先通过递推关系推出数列的周期为3, 然后3个数为一组, 分别计算 $T_{3k}, T_{3k+1}, T_{3k+2}$ 的表达式 $k \in \mathbf{N}^*$ 后进行研究.

【详解】由 $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = -\frac{1}{2}$ 可知, $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n \neq 0$, 亦可得: $a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = -\frac{1}{2}$, 两式相除得:

$\frac{a_{n+3}}{a_n} = 1$, 即 $a_{n+3} = a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以3为周期的周期数列, 由 $a_1 = -2, a_2 = \frac{1}{4}$ 得:

$$a_3 = -\frac{1}{2a_1 \cdot a_2} = 1.$$

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 结合数列的周期性, 当 $k \in \mathbf{N}^*$, 则 $T_{3k} = (a_1 a_2 a_3)^k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$, 记 $b_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$,

为了让 b_k 越大, 显然需考虑 k 为偶数, 令 $k = 2t (t \in \mathbf{N}^*)$, 结合指数函数的单调性, 则

$$b_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2t} = \left(\frac{1}{4}\right)^t \leq \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}, \text{ 即 } T_{3k} \leq \frac{1}{4}; \text{ 类似的 } T_{3k+1} = a_1(a_2 a_3 a_4)^k = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \leq -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$T_{3k+2} = a_1 a_2 (a_3 a_4 a_5)^k = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ 综上所述, } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项积的最大值为 } 1.$$

四、解答题: 本题共5小题, 共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分) 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2$, $g(x) = e^x - bx$, $a, b \in \mathbf{R}$, 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - y + 1 = 0$ 垂直.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $g(x)$ 的单调区间;

【答案】(1) 2 (2) 答案见解析

【解析】

【分析】(1) 利用导数的几何意义可得关于 a 的方程, 解方程即可得出答案;

(2) 对 $g(x)$ 求导, 分 $b \leq 0$ 和 $b > 0$ 讨论 $g'(x)$ 的正负, 即可求出 $g(x)$ 的单调性;

【小问1详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\because f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 \therefore f'(x) = \frac{1}{x} - ax, \quad f'(1) = 1 - a$$

由于直线 $x - y + 1 = 0$ 的斜率为 1, $\therefore 1 \times (1 - a) = -1, \therefore a = 2$.

6 分

【小问 2 详解】

$$g(x) = e^x - bx, \quad g'(x) = e^x - b,$$

①当 $b \leq 0$ 时, $g'(x) = e^x - b > 0$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

②当 $b > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$ 有 $x = \ln b$,

当 $x \in (-\infty, \ln b)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\ln b, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

综上所述: $b \leq 0$, $g(x)$ 的单调递增区间为 $\mathbf{R}$,

$b > 0$, $g(x)$ 的单调减区间为 $x \in (-\infty, \ln b)$, $g(x)$ 的单调增区间为 $(\ln b, +\infty)$.

13 分

【点睛】关键点点睛: 本题考查导数的几何意义、求单调区间和利用导数求解恒成立问题; 本题求解恒成立问题的关键是将恒成立问题转化为求函数的最值.

16. (15 分) 为倡导公益环保理念, 培养学生社会实践能力, 某中学开展了旧物义卖活动, 所得善款将用于捐赠“圆梦困境学生”计划. 活动共计 50 多个班级参与, 1000 余件物品待出售. 摄影社从中选取了 20 件物品, 用于拍照宣传, 这些物品中, 最引人注目的当属优秀毕业生们的笔记本, 已知高三 1, 2, 3 班分别有 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 的同学有购买意向. 假设三个班的人数比例为 6: 7: 8

(1) 现从三个班中随机抽取一位同学:

(i) 求该同学有购买意向的概率;

(ii) 如果该同学有购买意向, 求此人来自 2 班的概率;

(2) 对于优秀毕业生的笔记本, 设计了一种有趣的“掷骰子叫价确定购买资格”的竞买方式: 统一以 0 元为初始叫价, 通过掷骰子确定新叫价, 若点数大于 2, 则在已叫价格基础上增加 1 元更新叫价, 若点数小于 3, 则在已叫价格基础上增加 2 元更新叫价; 重复上述过程, 能叫到 10 元, 即获得以 10 元为价格的购买资格, 未出现叫价为 10 元的情况则失去购买资格, 并结束叫价. 若甲同学已抢先选中了其中一本笔记本, 试估计其获得该笔记本购买资格的概率(精确到 0.01).

【答案】(1)(i) $\frac{22}{63}$; (ii) $\frac{7}{22}$ (2) 0.75.

【分析】(1) 设事件 A = “该同学有购买意向”, 事件 B_i = “该同学来自 i 班” ($i=1, 2, 3$). 根据全概率公式即

可求解 $P(A)$, 根据条件概率公式即可求解 $P(B_2 | A)$;

(2) 由题意可得每次叫价增加 1 元的概率为 $\frac{2}{3}$, 每次叫价增加 2 元的概率为 $\frac{1}{3}$. 设叫价为 $n(3, n, 10)$ 元的概率为 P_n , 叫价出现 n 元的情况只有下列两种: ①叫价为 $n-1$ 元, 且骰子点数大于 2, 其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$; ②叫价为 $n-2$ 元, 且骰子点数小于 3, 其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-2}$. 于是得到 $P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}P_{n-2} (n \geq 3)$, 构造等比数列 $\{P_n - P_{n-1}\}$, 结合累加法可求解。

【详解】(1)(i) 设事件 A = “该同学有购买意向”, 事件 B_i = “该同学来自 i 班” ($i = 1, 2, 3$)

由题意可知 $P(B_1) = \frac{6}{21}, P(B_2) = \frac{7}{21}, P(B_3) = \frac{8}{21}$,

$P(A | B_1) = \frac{1}{2}, P(A | B_2) = \frac{1}{3}, P(A | B_3) = \frac{1}{4}$, 所以, 由全概率公式可得

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + P(B_3) \cdot P(A | B_3) = \frac{6}{21} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{21} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{21} \times \frac{1}{4} = \frac{22}{63}$. 8 分

(2) 由题意可得每次叫价增加 1 元的概率为 $\frac{2}{3}$, 每次叫价增加 2 元的概率为 $\frac{1}{3}$.

设叫价为 $n(3, n, 10)$ 元的概率为 P_n , 叫价出现 n 元的情况只有下列两种:

①叫价为 $n-1$ 元, 且骰子点数大于 2, 其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}$;

②叫价为 $n-2$ 元, 且骰子点数小于 3, 其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-2}$.

于是得到 $P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}P_{n-2} (n \geq 3)$, 易得 $P_1 = \frac{2}{3}, P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$

由于 $P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}P_{n-2} = -\frac{1}{3}(P_{n-1} - P_{n-2}) (n \geq 3)$,

于是当 $n \geq 2$ 时, 数列 $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是以首项为 $\frac{1}{9}$, 公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列,

故 $P_n - P_{n-1} = \frac{1}{9} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} (n \geq 2)$.

于是 $P_{10} = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots + (P_9 - P_8) + (P_{10} - P_9)$

$$= \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{9} \times \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx 0.75$$

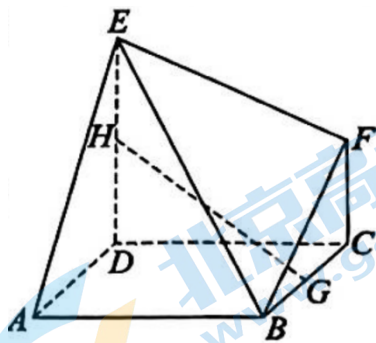
于是, 甲同学能够获得笔记本购买资格的概率约为 0.75.

15 分

【点睛】关键点睛:

第二问中关键是设叫价为 $n(3 \leq n \leq 10)$ 元的概率为 P_n ,利用叫价为 n 元是在叫价为 $(n-1)$ 元的基础上再叫价1元或在叫价为 $(n-2)$ 元的基础上再叫价2元,从而确定 P_n 与 P_{n-1} 的关系,再结合数列中的构造法和累加法即可求解.

17. (15分) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel DE$, 且 $AB = DE = 2, CF = 1, G$ 为棱 BC 的中点, H 为棱 DE 上的动点.



(1) 求二面角 $A-BE-F$ 的正弦值;

(2) 是否存在点 H 使得 $GH \parallel$ 平面 BEF ? 若存在, 求 $\frac{EH}{ED}$ 的值; 否则, 请说明理由.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{7}}{7}$;

(2) 存在, $\frac{EH}{ED} = \frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】 (1) 连接 AC, BD 交于点 O , 作 $Oz \perp$ 平面 $ABCD$, 以 O 为原点建立空间直角坐标系, 利用面面角的向量求法求解即得.

(2) 利用(1)中信息, 假定存在符合条件的点 H , 利用空间位置关系的向量证明求解即得.

【小问1详解】

连接 AC, BD 交于点 O , 由四边形 $ABCD$ 为菱形, 得 $AC \perp BD$, 过点 O 作 $Oz \perp$ 平面 $ABCD$,

显然直线 OA, OB, Oz 两两垂直, 以 O 为原点, 直线 OA, OB, Oz 分别为 x, y, z 建立空间直角坐标系,

由 $DE \perp$ 平面 $ABCD$, 得 $DE \parallel Oz$, 又 $CF \parallel DE$, 且 $AB = DE = 2, CF = 1$,

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), E(0, -1, 2), F(-\sqrt{3}, 0, 1)$,

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{BE} = (0, -2, 2), \overrightarrow{BF} = (-\sqrt{3}, -1, 1)$,

设平面 ABE , 平面 BEF 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

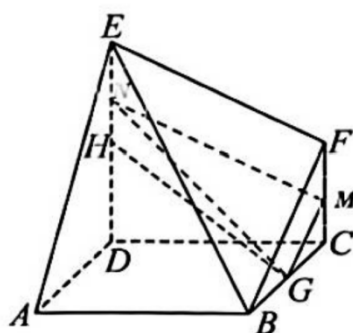
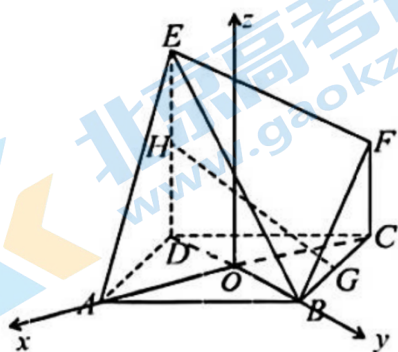
$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_1 = -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ \overrightarrow{BE} \cdot \vec{n}_1 = -2y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_1 = 1, \text{得 } \vec{n}_1 = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BF} \cdot \vec{n}_2 = -\sqrt{3}x_2 - y_2 + z_2 = 0 \\ \overrightarrow{BE} \cdot \vec{n}_2 = -2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_2 = 1, \text{得 } \vec{n}_2 = (0, 1, 1),$$

设二面角 $A-BE-F$ 的大小为 θ , 则 $|\cos \theta| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{7},$

因此 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{7}}{7}$, 所以二面角 $A-BE-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

8 分



【小问 2 详解】

存在 H 符合题意, 且 $\frac{EH}{ED} = \frac{1}{4}$. 理由如下:

令 $\overrightarrow{EH} = \lambda \overrightarrow{ED} (\lambda \in [0, 1])$, 而 $D(0, -1, 0)$, 棱 BC 的中点 $G(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

则 $\overrightarrow{EH} = \lambda(0, 0, -2) = (0, 0, -2\lambda)$, $\overrightarrow{GE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 2)$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EH} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 2-2\lambda)$,

若 $GH \parallel$ 平面 BEF , 而平面 BEF 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$, 则 $\overrightarrow{GH} \perp \vec{n}_2$, 即 $\overrightarrow{GH} \cdot \vec{n}_2 = 0$,

因此 $0 - \frac{3}{2} + 2 - 2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$, 即 $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{4} \overrightarrow{ED}$, 则 $\frac{EH}{ED} = \frac{1}{4}$,

所以在点 H 使得 $GH \parallel$ 平面 BEF , $\frac{EH}{ED} = \frac{1}{4}$.

15 分

18. (17 分) 与 x 轴不垂直的直线 l 交抛物线 $T: y^2 = 2px (p > 0)$ 于 M, N 两点, F 为抛物线的焦点, 线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 $E(3, 0)$, 已知 $O(0, 0), Q(4, 0)$ 且有 $|MF| + |NF| = 4$

(1) 求抛物线 T 的方程:

(2) 过 F 的直线交抛物线 T 于 A, B 两点, 延长 AQ, BQ 分别交抛物线 T 于 C, D ; G, H 分别为

AB、CD 的中点，求 $\cos \angle GOH$ 的最小值.

【答案】 (1) $y^2 = 4x$ (2) $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

【解析】

(1) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由抛物线定义可知 $|MF| + |NF| = x_1 + x_2 + p = 4$, 又线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 $E(3, 0)$, 故 $|ME| = |NE|$,

$$(x_1 - 3)^2 + y_1^2 = (x_2 - 3)^2 + y_2^2 \text{ 即 } (x_1 + x_2 - 6)(x_1 - x_2) = y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1)$$

因为 $x_2 \neq x_1$, 所以 $(x_1 + x_2 - 6) = -2p$, 即 $4 - p - 6 = -2p$, 则有 $p = 2$,

即抛物线 T 的方程为 $y^2 = 4x$.

7 分

(2) 设 $AB: x = ny + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

代入 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 - 4ny - 4 = 0$, 则有 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 4n \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$, $x_1 + x_2 = n(y_1 + y_2) + 2 = 4n^2 + 2$,

所以 $G(2n^2 + 1, 2n)$, 故 $k_{OG} = \frac{2n}{2n^2 + 1}$

设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 则 $k_{AC} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{4}{y_1 + y_3} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4 - 4}}$ 解得 $y_3 = -\frac{16}{y_1}$, 同理, $y_4 = -\frac{16}{y_2}$,

所以 H 点的横坐标为 $32 \left(\frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} \right) = 32 \times \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{(y_1 y_2)^2} = 16(2n^2 + 1)$,

H 点的纵坐标为 $-8 \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) = 8n$, 所以 $k_{OH} = \frac{n}{2(2n^2 + 1)}$, 有 $k_{OH} = \frac{1}{4} k_{OG}$,

9 分

记 $t = k_{OG} = \frac{2n}{2n^2 + 1}$, 故 $|k_{OG}| = \frac{2|n|}{2n^2 + 1}$,

当 $n = 0$ 时, $k_{OG} = 0$,

当 $n \neq 0$ 时, $|k_{OG}| = \frac{2|n|}{2n^2 + 1} = \frac{2}{2|n| + \frac{1}{|n|}} \leq \frac{2}{2\sqrt{2|n|} \cdot \frac{1}{|n|}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

易求得 $t^2 \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$; 取直线 OG、OH 的方向向量分别为 $\vec{p} = (1, t), \vec{q} = (4, t)$,

故 $\cos \angle GOH = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{t^2 + 4}{\sqrt{t^2 + 1} \sqrt{t^2 + 16}}$

13 分

当 $t^2 = 0$ 时, $\cos \angle GOH = 1$, 当 $t^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 时, $\cos \angle GOH = \sqrt{1 - \frac{9}{t^2 + \frac{16}{t^2} + 17}}$

函数 $y = x + \frac{16}{x}$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减, 最小值为 $\frac{1}{2} + \frac{16}{\frac{1}{2}} = \frac{65}{2}$,

所以当 $t^2 = \frac{1}{2}$ 时, $\cos \angle GOH$ 取到最小值为 $\sqrt{1 - \frac{9}{\frac{65}{2} + 17}} = \sqrt{\frac{9}{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$ 17 分

19. (17 分) 对于无穷数列 $\{a_n\}$, 设集合 $A = \{x | x = a_n, n \geq 1\}$. 若 A 为有限集, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”.

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$, 判断 $\{a_n\}$ 是否为“ T 数列”, 并说明理由;

(2) 设函数 $y = f(x)$ 的表达式为 $f(x) = 3|x+1| - |x+2|$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$. 若 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 求首项 a_1 的值;

(3) 设 $a_n = \cos(t\pi n)$. 若数列 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”, 求实数 t 的取值集合.

【解题思路】 (1) 根据 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$, 计算即可; (2) $f(x)_{\min} = f(-1) = -1$, 当 $x > -1$ 时, $f(x) = 2x + 1 > x$, 分 $a_1 = -1, a_1 \neq -1$ 两种情况讨论即可; (3) 当 t 为有理数时, 必存在 $p \in \mathbb{Z}^+, q \in \mathbb{Z}$, 使得 $t = \frac{q}{p}$, 则 $a_{n+2p} = \cos\left[\frac{q}{p}\pi(n+2p)\right] = \cos\left(\frac{q}{p}\pi n + 2q\pi\right) = \cos\frac{q}{p}\pi n = a_n$, 因此集合 $A = \{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ 中元素个数不超过 $2p$, 为有限集; t 为无理数时, 用反证法证明 $a_m \neq a_n$ 解决即可.

【解答过程】 (1) 因为 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$,

所以 $a_2 = \frac{1}{1-2} = -1, a_3 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, a_5 = \frac{1}{1-2} = -1,$

所以 $A = \{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$, 所以 $\{a_n\}$ 是“ T 数列”; 5 分

(2) 由题知, $f(x) = 3|x+1| - |x+2| = \begin{cases} 2x+1 & x \geq -1 \\ -4x-5 & -2 \leq x < -1 \\ -2x-1 & x < -2 \end{cases}$,

所以 $f(x)_{\min} = f(-1) = -1$,

当 $x > -1$ 时, $f(x) = 2x + 1 > x$ (*),

因此当 $a_1 = -1$ 时, $a_2 = f(a_1) = -1, a_3 = f(a_2) = -1, \dots$,

即 $a_n = -1, n \in \mathbb{N}^*$, 此时 $\{a_n\}$ 为“ T 数列”,

当 $a_1 \neq -1$ 时, $a_2 = f(a_1) > -1$,

由(*)得 $a_3 = f(a_2) > a_2 > -1, a_4 = f(a_3) > a_3 > -1, \dots$,

因此 $a_{n+1} > a_n, \{a_n\}$ 显然不是“ T 数列”;

综上, $a_1 = -1$;

9 分

(3) 当 t 为有理数时, 必存在 $p \in \mathbb{Z}^+, q \in \mathbb{Z}$, 使得 $t = \frac{q}{p}$,

$$\text{则 } a_{n+2p} = \cos\left[\frac{q}{p}\pi(n+2p)\right] = \cos\left(\frac{q}{p}\pi n + 2q\pi\right) = \cos\frac{q}{p}\pi n = a_n,$$

因此集合 $A = \{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ 中元素个数不超过 $2p$, 为有限集;

当 t 为无理数时, 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n$, 下用反证法证明 $a_m \neq a_n$,

若 $a_m = a_n$, 即 $\cos t\pi n = \cos t\pi m$,

则 $t\pi n = t\pi m + 2k\pi$ 或 $t\pi n = -t\pi m + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$,

则 $t = \frac{2k}{n-m} \in \mathbb{Q}$ 或 $t = \frac{2k}{n+m} \in \mathbb{Q}$, 矛盾, 所以 $a_m \neq a_n$,

因此集合 $A = \{x | x = a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ 必为无限集;

综上, t 的取值集合是全体有理数, 即 $t \in \mathbb{Q}$.

17 分