

大兴区 2023~2024 学年第一学期期末检测试题

高一数学

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) $\sin \frac{3\pi}{4}$ 等于

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(2) 函数 $f(x) = \tan 2x$ 的最小正周期等于

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) π

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) 2π

(3) 下列函数中，不是表示同一函数的是

(A) $x = \cos \alpha$, $y = \cos x$

(B) $y = \ln x^2$, $y = 2 \ln x$

(C) $y = 1$, $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

(D) $y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$, $y = |x|$

(4) 下列函数中，在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是

(A) $y = 2^{-x}$

(B) $y = -\sqrt{x}$

(C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

(D) $y = \sin x$

(5) 下列区间中，方程 $2^x + 4x - 3 = 0$ 的解所在区间是

(A) $(-\frac{1}{4}, 0)$

(B) $(0, \frac{1}{4})$

(C) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

(D) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

(6) 已知 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ，则 “ $\alpha \neq \beta$ ” 是 “ $\sin \alpha \neq \sin \beta$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知 θ 为第二象限角，且 $\sin(\theta + \pi) = -\frac{3}{5}$ ，则 $\tan(\theta - \frac{\pi}{4})$ 等于

- (A) -7 (B) 1
(C) -1 (D) 7

(8) 要得到函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ 的图象，只需将函数 $y = \sin x$ 图象上的所有点

- (A) 先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再将横坐标伸长到原来的 2 倍
(B) 先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$
(C) 先向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，再将横坐标伸长到原来的 2 倍
(D) 先向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

(9) 设 $0 < m < 1 < a < b$ ，给出下列四个结论：① $m^a > m^b$ ；② $a^m > b^m$ ；

③ $\log_a m < \log_b m$ ；④ $\frac{b}{a+m} > \frac{a}{b+m}$ 。其中所有正确结论的序号是

- (A) ①② (B) ③④
(C) ①②③ (D) ①③④

(10) 已知函数 $f(x) = x + \log_2 x - 4$ 的零点为 x_1 ， $g(x) = x + \log_a(x-1) - 5$ ($a > 1$) 的零点为 x_2 ，

若 $x_2 - x_1 > 1$ ，则实数 a 的取值范围是

- (A) $(1, \sqrt{2})$ (B) $(\sqrt{2}, 2)$
(C) $(1, 2)$ (D) $(2, +\infty)$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 函数 $y = \tan x$ 的定义域是_____.

(12) “密位”是一种度量角的单位. 我国采用的“密位制”是 6000 密位制, 即将一个圆周分为 6000 等份, 每一个等份是一个密位. 那么 300 密位等于_____rad.

(13) 指数函数 $y = a^x$ 在区间 $[1, 2]$ 上最大值与最小值的差为 2, 则 a 等于_____.

(14) 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, 若 $f(x) = 1$, 则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$; 若 $0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $a + b$ 的取值范围是_____.

(15) 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $\frac{f(x)}{f(y)} = f(x - y)$ 成立. 给出下列结论:

① $f(0) = 1$; ② $f(x^2) = 2f(x)$; ③ $f(x) > 0$; ④ $\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x + y}{2}\right)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

(I) 求值: $(\frac{25}{9})^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{(-2)^2} + e^{\ln 2} + \lg \sqrt[5]{100}$;

(II) 已知 $10^a = 2, 10^b = 3$, 用 a, b 表示 $\log_5 12$.

(17) (本小题 14 分)

在平面直角坐标系中, 角 α 的终边与单位圆交于点 $P(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, 若角 α 与 β 的顶点均为坐标原点 O , 始边均为 x 轴的非负半轴, 将 OP 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后与角 β 的终边 OQ 重合.

(I) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;

(II) 求 $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ 的值.

(18) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值与最小值.

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = \ln(1-x)$.

(I) 求证: $f(x) + g(x)$ 为偶函数;

(II) 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 判断 $h(x)$ 的单调性, 并用单调性定义加以证明.

(20) (本小题 14 分)

设关于 x 的函数 $y = \cos 2x - 2a \cos x - 2a$ 的最小值为 $f(a)$.

(I) 求 $f(a)$;

(II) 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 求函数 y 的最大值.

(21) (本小题15分)

摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施, 游客坐在摩天轮的座舱里慢慢地往上转, 可以从高处俯瞰四周景色. 如图, 某摩天轮最高点距离地面高度为120m, 转盘直径为110m, 设置有48个座舱, 开启后按逆时针方向匀速旋转, 游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱, 转一周大约需要30 min.



(I) 游客甲坐上摩天轮的座舱, 开始转动 t min 后距离

地面的高度为 H m, 求在转动一周的过程中, H 关于 t 的函数解析式;

(II) 求游客甲在开始转动5 min后距离地面的高度;

(III) 若甲、乙两人分别坐在两个相邻的座舱里, 在运行一周的过程中, 求两人距离地面的高度差 h (单位: m) 关于 t 的函数解析式, 并求高度差的最大值(精确到0.1).

(参考公式与数据: $\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$;

$\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$; $\sin \frac{\pi}{48} \approx 0.065$.)

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测

高一数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	D	C	B	A	A	D	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11) $\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$

(12) $\frac{\pi}{10}.$

(13) 2.

(14) $x = e$, 或 $x = \frac{1}{e}$ (只写对一个给 2 分, 两个全对给 3 分); $(2, +\infty)$ (2 分)

(15) ①③④ (只选对一个给 2 分, 只选对两个给 3 分; 全对给 5 分, 有错误选项给 0 分)

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

(17) (本小题 14 分)

解: (I) 原式 $= ((\frac{5}{3})^2)^{-\frac{1}{2}} - |-2| + 2 + \lg(10^2)^{\frac{1}{5}}$ 4 分

$= (\frac{5}{3})^{-1} - 2 + 2 + \lg 10^{\frac{2}{5}}$ 7 分

$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$

$= 1$ 8 分

(II) 由已知, $a = \lg 2, b = \lg 3$,2 分

则 $\log_5 12 = \lg_5 (3 \times 2^2)$

$= \frac{\lg(3 \times 2^2)}{\lg \frac{10}{2}}$ 3 分

$= \frac{\lg 3 + 2\lg 2}{1 - \lg 2}$ 5 分

$= \frac{2a + b}{1 - a}$ 6 分

(17) (本小题 14 分)

解: (I) 由三角函数定义, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,2 分

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{.....3 分}$$

$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \quad \text{.....5 分}$$

$$= \frac{7}{25} \quad \text{.....6 分}$$

(II) 由题意, $\beta = \alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,2 分

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta \quad \text{.....3 分}$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad \text{.....4 分}$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{.....4 分}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \quad \text{.....5 分}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{10} - \frac{3\sqrt{2}}{10} \quad \text{.....7 分}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{10} \quad \text{.....8 分}$$

(18) (本小题 14 分)

解: (I) 因为 $f(x) = \sin x \cos x - \sin^2 x$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{.....2 分}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \quad \text{.....3 分}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}, \quad \text{.....4 分}$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$6 分

函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$7 分

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,8 分

得 $k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}\right] (k \in \mathbb{Z})$9 分

(II) 因为 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$1 分

当 $2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(-\frac{\pi}{4}) = -1$3 分

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$5 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 -1 , 最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

(19) (本小题 14 分)

(I) 证明: 函数 $f(x) + g(x)$ 的自变量 x 满足 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$,

解得 $-1 < x < 1$,

所以函数 $f(x) + g(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$2 分

对于 $\forall x \in (-1, 1)$, 都有 $-x \in (-1, 1)$, 且

$$\begin{aligned} f(-x) + g(-x) &= \ln(1-x) + \ln(1+x), \\ &= g(x) + f(x). \end{aligned} \quad \text{.....4 分}$$

所以函数 $f(x) + g(x)$ 为偶函数.5 分

(II) 函数 $h(x)$ 是单调递增函数.1 分

证明: 设 $\forall x_1, x_2 \in (-1, 1)$, 且 $x_1 < x_2$,2 分

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(x_2) &= \ln(1+x_1) - \ln(1-x_1) - (\ln(1+x_2) - \ln(1-x_2)) \\ &= \ln(1+x_1) + \ln(1-x_2) - (\ln(1-x_1) + \ln(1+x_2)) \\ &= \ln(1+x_1)(1-x_2) - \ln(1-x_1)(1+x_2) \end{aligned} \quad \text{.....4 分}$$

$$(1+x_1)(1-x_2) - (1-x_1)(1+x_2) = 2(x_1 - x_2), \quad \text{.....5 分}$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $2(x_1 - x_2) < 0$, 即 $(1+x_1)(1-x_2) < (1-x_1)(1+x_2)$,6 分

又知 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, 所以 $(1+x_1)(1-x_2) > 0$, $(1-x_1)(1+x_2) > 0$,

因此 $\ln(1+x_1)(1-x_2) < \ln(1-x_1)(1+x_2)$,7 分

即 $h(x_1) < h(x_2)$, 由函数单调性定义可知,8 分

函数 $h(x)$ 是单调递增函数.9 分

(20) (本小题 14 分)

解: (I) $y = 2\cos^2 x - 2a\cos x - 2a - 1$,

设 $t = \cos x$, 则 $y = 2t^2 - 2at - 2a - 1$, $t \in [-1, 1]$ 2 分

由于 $y = 2(t - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 1$,3 分

若 $\frac{a}{2} < -1$, 则当 $t = -1$ 时, y 取得最小值 1, 即 $f(a) = 1$;5 分

若 $-1 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, 则当 $t = \frac{a}{2}$ 时, y 取得最小值 $-\frac{a^2}{2} - 2a - 1$, 即 $f(a) = -\frac{a^2}{2} - 2a - 1$; ...7 分

若 $\frac{a}{2} > 1$, 则当 $t = 1$ 时, y 取得最小值 $1 - 4a$, 即 $f(a) = 1 - 4a$.

所以 $f(a) = \begin{cases} 1, & a < -2, \\ -\frac{a^2}{2} - 2a - 1, & -2 \leq a \leq 2, \\ 1 - 4a, & a > 2. \end{cases}$ 9 分

(II) 由第 (I) 问的结论可知,

当 $a < -2$ 时, $f(a) = \frac{1}{2}$ 无解;1 分

当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, 由 $f(a) = \frac{1}{2}$, 解得 $a = -1$, 或 $a = -3$ (舍);2 分

当 $a > 2$ 时, 由 $f(a) = \frac{1}{2}$, 解得 $a = \frac{1}{8}$ (舍),3 分

综上 $a = -1$,

此时 $y = 2\cos^2 x + 2\cos x + 1$

$$= 2(\cos x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}.$$

当 $\cos x = 1$, 即 $x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时, y 取得最大值 5.5 分

(21) (本小题 15 分)

解: (I) 如图, 设座舱距离地面最近的位置为点 P , 以轴心 O 为原点, 与地面平行的直线为 x 轴建立直角坐标系.

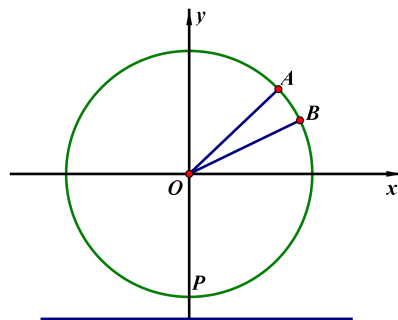
设 $t = 0\text{min}$ 时, 游客甲位于点 $P(0, -55)$,

以 OP 为终边的角为 $-\frac{\pi}{2}$; 根据摩天轮转

一周大约需要 30min, 可知座舱转动的

角速度约为 $\frac{\pi}{15} \text{ rad/min}$, 由题意可得

$$H = 55\sin(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}) + 65, 0 \leq t \leq 30. \text{5 分}$$



(II) 当 $t=5$ 时,

$$H = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15} \times 5 - \frac{\pi}{2}\right) + 65 = 37.5 .$$

所以, 游客甲在开始转动 5min 后距离地面的高度约为 37.5m.2 分

(III) 如图, 甲、乙两人的位置分别用点 A, B 表示, 则 $\angle AOB = \frac{2\pi}{48} = \frac{\pi}{24}$1 分

经过 t min 后甲距离地面的高度为 $H_1 = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 65$, 点 B 相对于点 A 始终落后

$\frac{\pi}{24}$ rad, 此时乙距离地面的高度为 $H_2 = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{13\pi}{24}\right) + 65$ 3 分

则甲、乙距离地面的高度差

$$h = |H_1 - H_2| = 55 \left| \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{13\pi}{24}\right) \right| \quad \text{.....4 分}$$

$$= 55 \left| \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{24} - \frac{\pi}{15}t\right) \right| .$$

利用 $\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$, 可得

$$h = 110 \left| \sin \frac{\pi}{48} \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{48}\right) \right|, 0 \leq t \leq 30 . \quad \text{.....6 分}$$

当 $\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{48} = \frac{\pi}{2}$ (或 $\frac{3\pi}{2}$), 即 $t \approx 7.8$ (或 22.8) 时, h 的最大值为 $110 \sin\left(\frac{\pi}{48}\right) \approx 7.2$.

所以, 甲、乙两人距离地面的高度差的最大值约为 7.2m.8 分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜

京考一点通

