

太原市2021年高三年级模拟考试(三)

数学试卷(文科)

(考试时间:下午3:00—5:00)

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,第Ⅰ卷1至4页,第Ⅱ卷5至8页。
2. 回答第Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第Ⅰ卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第Ⅱ卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z = \frac{-1+i}{i}$,则在复平面内与复数 z 对应的点的坐标为

A. $(1, -1)$

B. $(1, 1)$

C. $(-1, 1)$

D. $(-1, -1)$

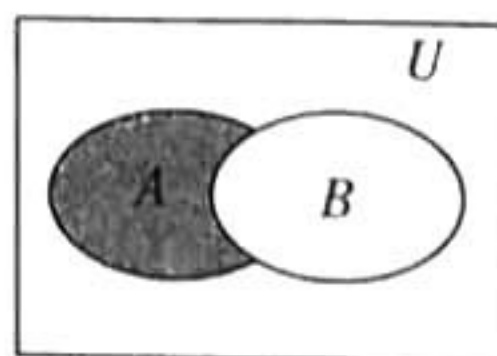
2. 已知全集 $U = \mathbb{R}$,集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$,则下图阴影部分表示的集合是

A. $\{-1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{2, 3\}$

D. $\{-1, 2, 3\}$



关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(ID:bj-gaokao\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

3. 设 $m \in \mathbf{R}$, 则“ $m > 1$ ”是“ $m^2 > 1$ ”

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 2020年初,新型冠状病毒(COVID-19)引起的肺炎疫情爆发以来,各地医疗机构采取了各种针对性的治疗方法,取得了不错的成效,某医疗机构开始使用中西医结合方法后,每周治愈的患者人数如下表所示:

第 x 周	1	2	3	4	5
治愈人数 y (单位:十人)	3	8	10	14	15

由上表可得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}_1 x + 1$, 则此回归模型第5周的残差(实际值减去预报值)为

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

5. 已知 α, β 是两个不同的平面, m, n 是两条不同的直线, 则下列正确的结论是

~~A. 若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$~~

~~B. 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$~~

C. 若 $m \perp n, m \perp \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$

D. 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

6. 古代中国的太极八卦图是以圆内的圆心为界, 画出相同的两个阴阳鱼, 阳鱼的头部有阴眼, 阴鱼的头部有阳眼, 表示万物都在相互转化, 互相渗透, 阴中有阳, 阳中有阴, 阴阳相合, 相生相克, 蕴含现代哲学中的矛盾对立统一规律. 图2(正八边形 $ABCDEFGH$)是由图1(八卦模型图)抽象而得到, 并建立如图2的平面直角坐标系, 设 $OA = 1$. 则下列错误的结论是

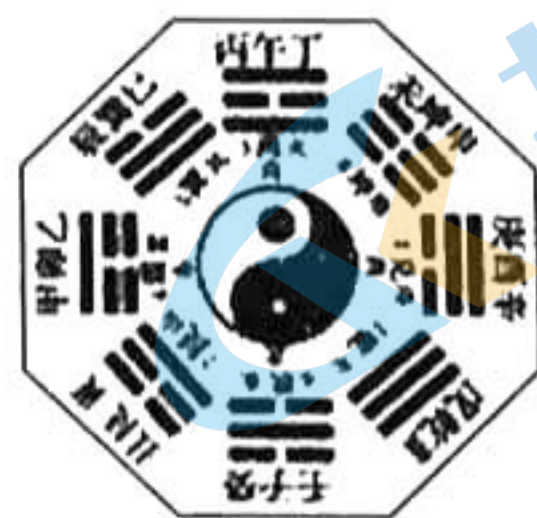


图1

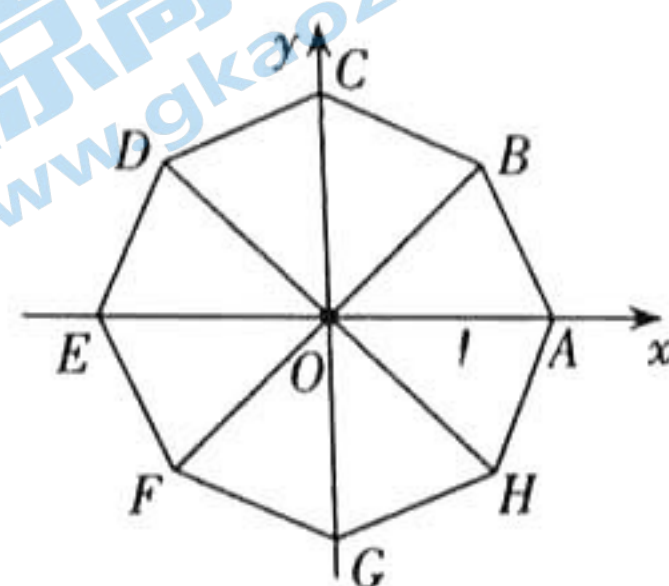


图2

A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 以射线 OF 为终边的角的集合可以表示为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$

C. 在以点 O 为圆心、 OA 为半径的圆中, 弦 AB 所对的劣弧弧长为 $\frac{\pi}{4}$

D. 正八边形 $ABCDEFGH$ 的面积为 $4\sqrt{2}$

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

7. 已知实数 a, b 满足 $3 \times 2^a - 2^{b+1} = 0, a = c + \log_2(x^2 + 2)$, 则下列正确的结论是

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $c > b > a$

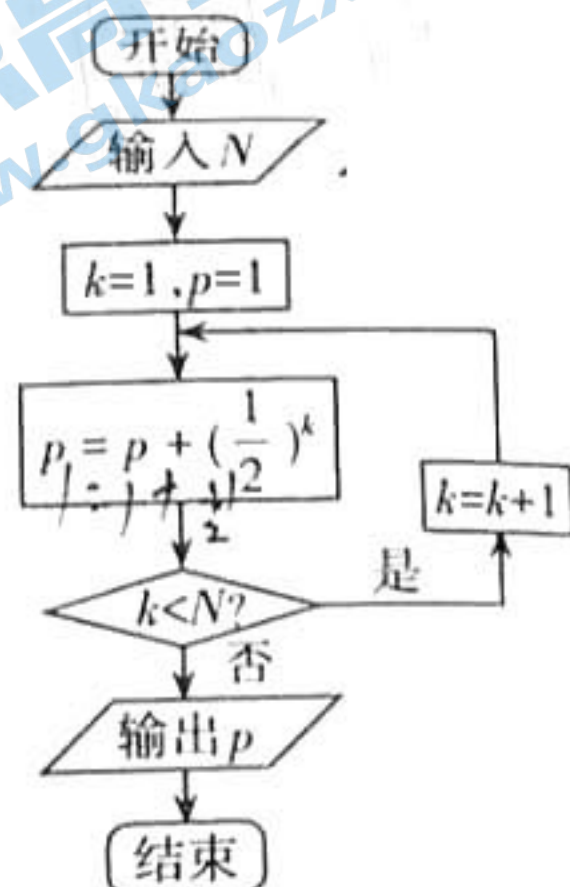
8. 执行如右图所示的程序框图, 若 $N = 2021$, 则输出的 $p =$

A. $2 - \frac{1}{2^{2019}}$

B. $2 - \frac{1}{2^{2020}}$

C. $2 - \frac{1}{2^{2021}}$

D. $2 - \frac{1}{2^{2022}}$



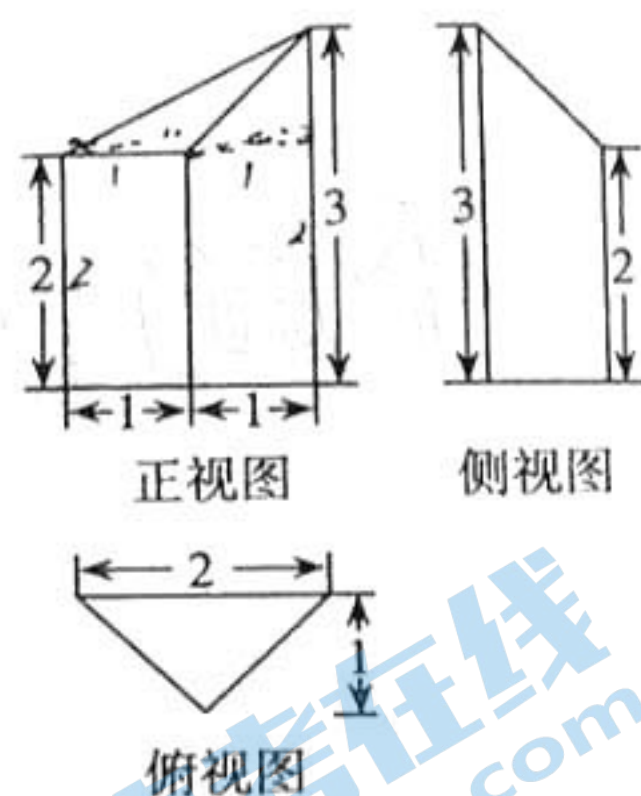
9. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. 3

D. 2



10. 已知锐角 α, β 满足 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$ 的最小值为

A. 4

B. $4\sqrt{3}$

C. 8

D. $8\sqrt{3}$

11. 已知三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 三棱锥 $A - A_1B_1C_1$ 的体积为 4, 三棱锥 $A_1 - ABC$ 的体积为 8, 则该三棱台的体积为

A. $12 + 3\sqrt{3}$

B. $12 + 4\sqrt{2}$

C. $12 + 4\sqrt{3}$

D. $12 + 4\sqrt{7}$

12. 已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点, 过原点的直线 l 与该双曲线的左右两支分别相交于点 A, B , 则 $\frac{1}{|FA|} - \frac{9}{|FB|}$ 的取值范围是

A. $[-1, 0)$

B. $[-\frac{4}{5}, 0)$

C. $[-\sqrt{2}, 1)$

D. $[-1, +\infty)$

太原市 2021 年高三年级模拟考试(三)

数 学 试 卷(文科)

第Ⅱ卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 现采用随机模拟的方法估计某运动员射击击中目标的概率.先由计算器给出0到9之间取整数的随机数,规定0,1,2表示没有击中目标,3,4,5,6,7,8,9表示击中目标,以4个随机数为一组,代表射击4次的结果,经随机模拟产生了20组随机数:

6011 3661 9597 6947 1417 4698 0371 6233 2616 8045
7424 7610 4281 7527 0293 7140 9857 0347 4373 8636

根据以上数据估计该运动员射击4次至少击中3次目标的概率为_____.

14. 若命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + 1 \geq 0$ ”是假命题,则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y - 5 \geq 0, \\ x + 2y - 7 \leq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{y^2 - 2xy}{x^2}$ 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \ln x - x, g(x) = e^x - x$,若存在实数 m, n ,使得 $f(m) - g(n) \geq -2$ 成立,则实数 $m - n =$ _____.

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(ID:bj-gaokao\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题：共 70 分 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤 第 17、21 题为必考题，每个试题考生都必须作答 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答

(一)必考题：共 60 分.

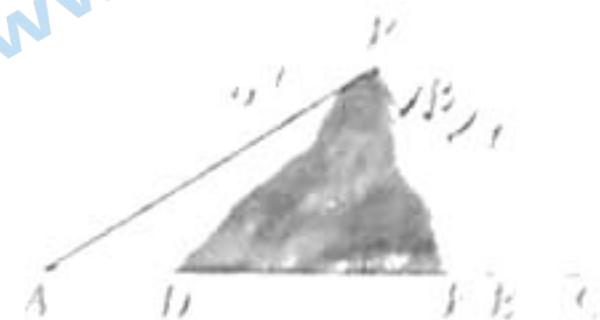
17. (本小题满分 12 分)

如图, A, B, C 为山脚两侧共线的一点, 在山顶 P 处测得这三点的俯角分别为 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$), $\gamma = 45^\circ$, 现计划沿直线 AC 开通一条穿山隧道 DE , 经测量 $AD = 100\text{m}$, $BE = 140\text{m}$, $BC = 200\text{m}$.

(I) 求 PB 的长;

(II) 求隧道 DE 的长(精确到 1m).

附: $\sqrt{2} \approx 1.414$; $\sqrt{3} \approx 1.732$.



18. (本小题满分 12 分)

为进一步保护环境, 加强治理空气污染, 某市环保监测部门对市区空气质量进行调查, 随机抽查了市区 100 天的空气质量等级与当天空气中 SO_2 的浓度(单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$), 整理数据得到下表.

SO_2 的浓度 \ 空气质量等级	$[0, 50]$	$(50, 150]$	$(150, 475]$
1(优)	28	6	2
2(良)	5	7	8
3(轻度污染)	3	8	9
4(中度污染)	1	12	11

若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”, 根据上述数据, 回答以下问题.

(I) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;

(II) 完成下面的 2×2 列联表,

SO_2 的浓度 \ 空气质量	$[0, 150]$	$(150, 475]$
空气质量好		
空气质量不好		

(III) 根据(II)中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度有关?

附: $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$;

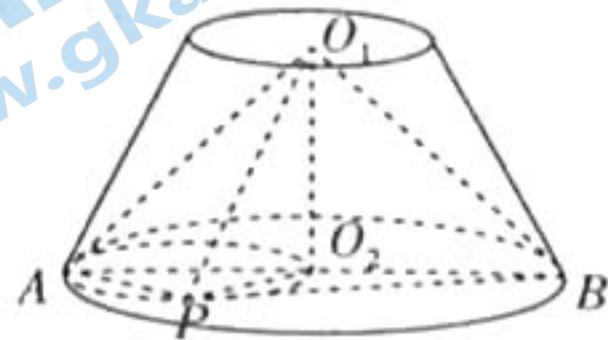
$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分12分)

如图, O_1, O_2 分别是圆台上下底面的圆心, AB 是下底面圆的直径, $AB = 2O_1O_2$, 点 P 是下底面内以 AO_2 为直径的圆上的一个动点(点 P 不在 AO_2 上).

(I) 求证: 平面 $AP O_1 \perp$ 平面 $PO_1 O_2$;

(II) 若 $AB = 2$, 当三棱锥 $O_1 - AP O_2$ 体积最大时, 求点 B 到平面 $AP O_1$ 的距离.



20. (本小题满分12分)

已知面积为16的等腰直角 $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 内接于抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), $OA \perp OB$, 过抛物线的焦点 F 且斜率为2的直线 l 与该抛物线相交于 P, Q 两点, 点 M 是 PQ 的中点.

(I) 求此抛物线的方程和焦点 F 的坐标;

(II) 若焦点在 y 轴上的椭圆 C 经过点 M , 其离心率 $e = \frac{1}{2}$, 求椭圆 C 的标准方程.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 1 - \ln 2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是函数 $g(x) = f(x) - m$ 的两个零点, 求证: $x_2 - x_1 < \frac{3}{2} - 4m$.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, \\ y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}),$$
以

坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(I)求曲线 C 的极坐标方程;

(II)设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$,点 B (异于点 O 和点 A)在曲线 C 上,求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. (本小题满分10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |2x + 1| - |mx - 1| (m > 0)$.

(I)当 $m = 2$ 时,解不等式 $f(x) < 2$;

(II)若 $f(x)$ 有最小值,且关于 x 的方程 $f(x) = -x^2 - x - \frac{7}{4}$ 有两个不相等的实数根,求实数 m 的取值范围.

太原市 2021 年高三年级模拟考试（三）

数学试题（文）参考答案及评分标准

一. 选择题: B C A A D D B C A C B A

二. 填空题: 13. 0.6 14. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 15. $[-1, 3]$ 16. 1

三. 解答题:

17. (I) 解: 在 $\triangle PBC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{PB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin(\beta - \gamma)}$,3 分

$\therefore PB = \frac{BC \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{85 \cdot \sin 45^\circ}{\sin(60^\circ - 45^\circ)} = 85(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$;5 分

(II) 由 (I) 得 $PB = 85(\sqrt{3} + 1)$, $\therefore \angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$, $\angle PAB = 30^\circ$,
 $\therefore AB = 2PB = 170(\sqrt{3} + 1)$,10 分

$\therefore DE = AB - AD - BE = 170(\sqrt{3} + 1) - 100 - 34 \approx 330 \text{ m}$12 分

18. 解: (I) 由题意得该市区 100 天中空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的天数分别是 36, 20, 20, 24, 所以该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率估计值分别为 0.36, 0.20, 0.20, 0.24;4 分

(II) 由题意可得 2×2 列联表如下:

SO_2 的浓度		
空气质量等级	$[0, 150]$	$(150, 475]$
空气质量好	46	10
空气质量不好	24	20

.....8 分

(III) 假设该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度没有关系,9 分

则 $k = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)} = \frac{100 \times (46 \times 20 - 10 \times 24)^2}{56 \times 44 \times 70 \times 30} \approx 8.936 > 6.635$,

所以有 99% 的把握认为该市一天的空气质量与当天 SO_2 的浓度有关.12 分

19. (I) 证明: 由题意得 $O_1O_2 \perp$ 平面 PAB , $\therefore O_1O_2 \perp AP$,

$\because AO_2$ 为直径, $\therefore AP \perp PO_2$, $\because PO_2 \cap O_1O_2 = O_2$, $\therefore AP \perp$ 平面 PO_1O_2 ,4 分

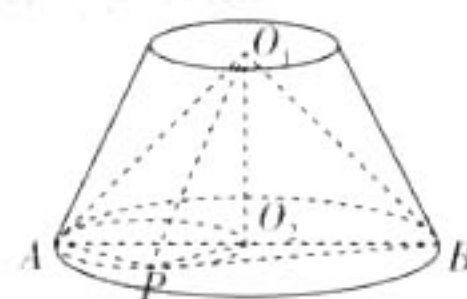
$\because AP \subset$ 平面 APO_1 , $\therefore$ 平面 $APO_1 \perp$ 平面 PO_1O_2 ;6 分

(II) 由题意得当 $AP = PO_2$ 时, 三棱锥 $O_1 - APO_2$ 的体积最大, 设点 O_2 到平面 APO_1 的距离为 d , 由 (I) 得 $AP \perp PO_2$, $AP \perp$ 平面 PO_1O_2 ,

$\because AB = 2$, $\therefore AO_2 = O_1O_2 = 1$, $AP = PO_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because V_{O_1 - APO_2} = V_{O_2 - APO_1}$, $\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle APO_2} \cdot O_1O_2 = \frac{1}{3} S_{\triangle APO_1} \cdot d$,

$\therefore d = \frac{S_{\triangle APO_2} \cdot O_1O_2}{S_{\triangle APO_1}} = \frac{AP \cdot PO_2 \cdot O_1O_2}{AP \cdot PO_1} = \frac{PO_2 \cdot O_1O_2}{\sqrt{PO_2^2 + O_1O_2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,10 分



∴ 点 B 到平面 APQ_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$12 分

20. (I) 由题意可知点 A 与 B 分别在直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上,2 分

不妨设 $A(m, m)(m>0)$, 则 $S_{\triangle AOB} = m^2 = 16$, ∴ $m=4$, ∴ $A(4, 4)$,4 分

∵ 点 A 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, ∴ $p=2$,

∴ 此抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$;6 分

(II) 由 (I) 得 $F(1, 0)$, 直线 l 的方程为 $x = \frac{1}{2}y + 1$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $M(x_0, y_0)$,

由 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得 $y^2 - 2y - 4 = 0$, ∴ $y_1 + y_2 = 2$, ∴ $y_0 = 1$, $x_0 = \frac{3}{2}$, ∴ $M(\frac{3}{2}, 1)$,9 分

由题意可设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1(a>b>0)$,

由 $\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 3 \end{cases}$, ∴ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$12 分

21. (I) 解: 由题意得 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{2}x(x>0)$, ∴ $f'(2) = \frac{a}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, ∴ $a=1$,2 分

∴ $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 1 - \ln 2(x>0)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{2-x^2}{2x}$,

令 $f'(x) > 0$, 则 $0 < x < \sqrt{2}$; 令 $f'(x) < 0$, 则 $x > \sqrt{2}$,

∴ $(0, \sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 的单调递增区间, $[\sqrt{2}, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间;4 分

(II) 由 (I) 得 $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 1 - \ln 2(x>0)$, 且 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{2})$ 上单调递增, 在 $[\sqrt{2}, +\infty)$

上单调递减, 由题意得 $f(x_1) = f(x_2) = m$, 且 $0 < x_1 < \sqrt{2} < x_2$,

∴ $x_2 - x_1 - \frac{3}{2} + 4m = x_2 - x_1 - \frac{3}{2} + 2(f(x_2) + f(x_1))$

$= 2\ln x_2 + x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 2\ln x_1 - x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2} - 4\ln 2$,6 分

令 $t_1(x) = 2\ln x + x - \frac{1}{2}x^2$, $x > \sqrt{2}$, ∴ $t_1'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{-x}$,

令 $t_1'(x) > 0$, 则 $\sqrt{2} < x < 2$; 令 $t_1'(x) < 0$, 则 $x > 2$,

∴ $t_1(x)$ 在 $(\sqrt{2}, 2)$ 上单调递增, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, ∴ $t_1(x) \leq t_1(2) = 2\ln 2$,8 分

令 $t_2(x) = 2\ln x - x - \frac{1}{2}x^2$, $0 < x < \sqrt{2}$, ∴ $t_2'(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{-x}$,

令 $t_2'(x) > 0$, 则 $0 < x < 1$; 令 $t_2'(x) < 0$, 则 $1 < x < \sqrt{2}$,

$\therefore t_2(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $[1, \sqrt{2})$ 上单调递减, $\therefore t_2(x) \leq t_2(1) = -\frac{3}{2}$,10 分

$$\therefore x_2 - x_1 - \frac{3}{2} + 4m \leq t_1(2) + t_2(1) + \frac{5}{2} - 4\ln 2 = 1 - 2\ln 2 < 0,$$

$$\therefore x_2 - x_1 < \frac{3}{2} - 4m. \quad \text{.....12 分}$$

22. 解: (I) 将 $\begin{cases} x = 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, \\ y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta \end{cases}$ 的参数 θ 消去得 $(x-2)^2 + y^2 = 4$,3 分

由 $\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ 可得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$;5 分

(II) 设点 B 的极坐标为 (ρ, α) ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 由题意得 $|OA| = 2$, $\rho = 4\cos\alpha$,

$$\therefore \triangle OAB \text{ 的面积 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot \rho \cdot \sin \angle AOB = 4\cos\alpha \left| \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right| \quad \text{.....8 分}$$

$$= 2 \left| \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq 2 + \sqrt{3},$$

当 $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ 时, $\triangle OAB$ 的面积取得最大值 $2 + \sqrt{3}$10 分

23 解: (I) 当 $m = 2$ 时, 原不等式为 $|2x+1| - |2x-1| < 2$,

$$\therefore \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ -(2x+1) - (1-2x) < 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x+1 - (1-2x) < 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ 2x+1 - (2x-1) < 2, \end{cases} \quad \text{.....3 分}$$

$$\therefore x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ 或 } \phi,$$

$\therefore$ 原不等式 $f(x) < 2$ 的解集为 $\{x \mid x < \frac{1}{2}\}$;5 分

(II) 令 $g(x) = -x^2 - x - \frac{7}{4}$, 则 $g(x)$ 是对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$, 且开口向下的抛物线,

$$\therefore f(x) = \begin{cases} (m-2)x-2, & x < -\frac{1}{2}, \\ (m+2)x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{m}, \\ (2-m)x+2, & x > \frac{1}{m} \end{cases} \text{ 有最小值, } \therefore 0 < m \leq 2,$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}m+1\right) < f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{2}{m}+1, \therefore f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}m+1\right), \quad \text{.....8 分}$$

$$\therefore -\left(\frac{1}{2}m+1\right) < g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}, \therefore 1 < m \leq 2,$$

综上, 实数 m 的取值范围为 $(1, 2]$10 分

以上各题其他解法, 请酌情赋分.