

2023 北京燕山初三（上）期中

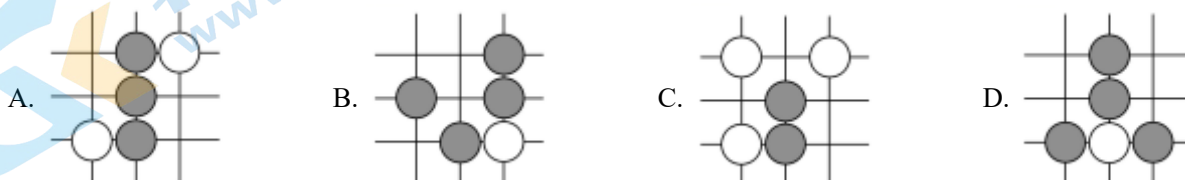
数 学

考生须知：

1. 本试卷共 8 页，三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷、答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和考号。
3. 选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹笔作答。
4. 所有试题均在答题卡上作答，在试卷上作答无效。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1 - 8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

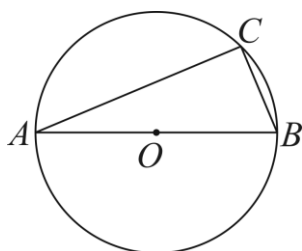
1. 围棋起源于中国，古代称之为“弈”，至今已有 4000 多年的历史。2017 年 5 月，世界围棋冠军柯洁与人工智能机器人 *AlphaGo* 进行围棋人机大战。截取首局对战棋谱中的四个部分，由黑白棋子摆成的图案是中心对称的是（ ）



2. 平面直角坐标系中，与点 $P(-5, 2)$ 关于原点对称的点的坐标是（ ）

- A. $(-5, 2)$ B. $(5, -2)$ C. $(5, 2)$ D. $(-5, -2)$

3. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的一点， $\angle ABC = 70^\circ$ ，则 $\angle BAC =$ （ ）

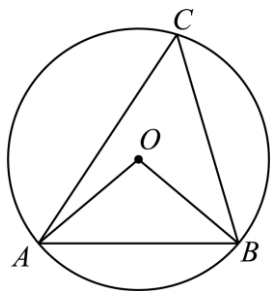


- A. 50° B. 40° C. 30° D. 20°

4. 一元二次方程 $x(x-1)=0$ 的解是（ ）

- A. $x_1 = 0, x_2 = 1$ B. $x_1 = x_2 = 1$
C. $x_1 = 0, x_2 = -1$ D. $x_1 = x_2 = -1$

5. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，若 $\angle AOB = 100^\circ$ ，则 $\angle ACB$ 的度数是（ ）



- A. 40° B. 50° C. 60° D. 80°

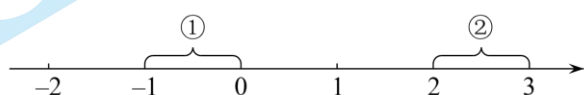
6. 用配方法解方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，配方结果正确的是（ ）

- A. $(x+1)^2 = 1$ B. $(x-1)^2 = 1$ C. $(x+1)^2 = 2$ D. $(x-1)^2 = 2$

7. 某市 2020 年底已有绿化面积 300 公顷，经过两年绿化、绿化面积逐年增加，到 2022 年底增加到 363 公顷。设绿化面积平均每年的增长率为 x ，由题意，所列方程正确的是（ ）

- A. $300(1+x) = 363$ B. $300(1+x)^2 = 363$
C. $300(1+2x) = 363$ D. $363(1-x)^2 = 300$

8. 如图，已知关于 x 的一元二次方程 $a(x-k)^2 - 1 = 0$ 的两根在数轴上对应的点分别在区域①和区域②，区域均含端点，则 k 的值可能是（ ）



- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

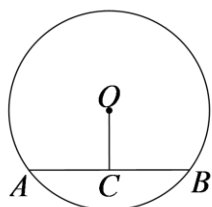
9. 抛物线 $y = 3(x-1)^2 + 2$ 的顶点坐标是_____.

10. 方程 $4x^2 = 1$ 的根是_____.

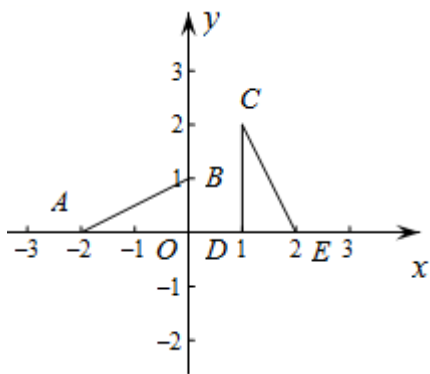
11. 写出一个二次函数，使其满足：①图象开口向上；②图象过原点，这个二次函数的解析式可以是_____.

12. 将抛物线 $y = 3x^2$ 向下平移 2 个单位长度，得到的抛物线解析式为_____.

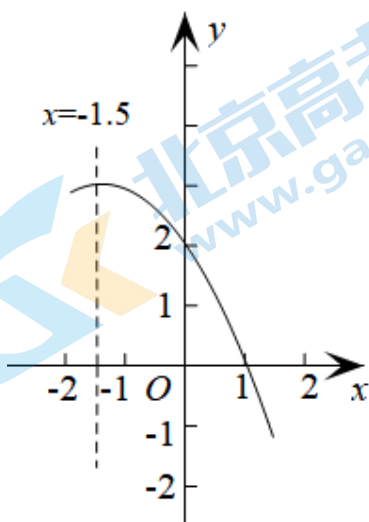
13. 如图， $\odot O$ 的直径为 10， AB 为弦， C 是 AB 的中点，若 $OC = 3$ ，则弦 AB 的长为_____.



14. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle CDE$ 可以看作是 $\triangle AOB$ 经过若干次图形的变化（平移、轴对称、旋转）得到的，写出一种由 $\triangle AOB$ 得到 $\triangle CDE$ 的过程：_____.



15. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示，则使得函数值 y 大于 2 的自变量 x 的取值范围是 _____.



16. 小云计划户外徒步锻炼，每天有“低强度”“高强度”“休息”三种方案，下表对应了每天不同方案的徒步距离（单位：km）. 若选择“高强度”要求前一天必须“休息”（第一天可选择“高强度”），则小云 5 天户外徒步锻炼的最远距离为 _____ km.

日期	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天
低强度	8	6	6	5	4
高强度	12	13	15	12	8
休息	0	0	0	0	0

三、解答题（共 68 分，第 17 - 22 题，每题 5 分；第 23 - 26 题，每题 6 分；第 27 - 28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解方程： $x^2 - 2x - 3 = 0$.

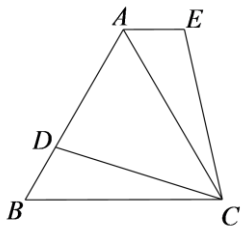
18. 已知 a 是方程 $2x^2 - 7x - 1 = 0$ 的一个根，求代数式 $a(2a - 7) + 5$ 的值.

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x - 3m = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 当 m 取负整数时, 求此时方程的根.

20. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AB 边上一点, 连接 CD , 将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 60° 后得到 CE , 连接 AE . 求证: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$.



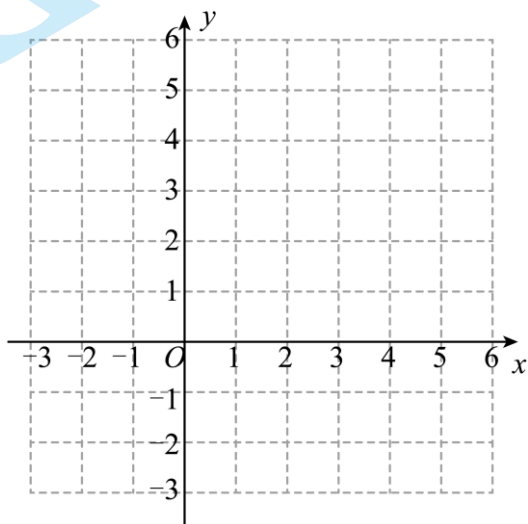
21. 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(0, 2)$ 和点 $(1, 5)$, 求此二次函数解析式.

22. 已知二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$.

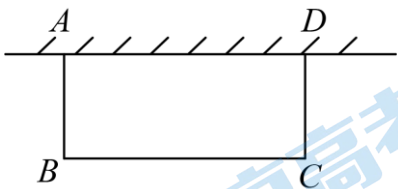
(1) 补全表格, 在平面直角坐标系中用描点法画出该二次函数的图象;

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...						...

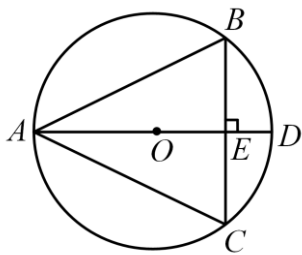
(2) 根据图象回答: 当 $0 \leq x < 3$ 时, y 的取值范围是_____.



23. 如图, 要给邻边不相等的矩形花圃 $ABCD$ 围上围栏, AD 边可利用已有的围墙 (可利用的围墙长度超过 6m), 另外三边所围栅栏总长度为 6m . 若矩形的面积为 4m^2 , 求 AB 的长度.



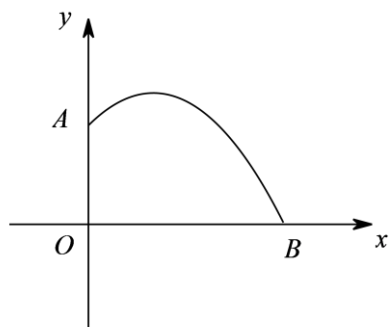
24. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD 是 $\odot O$ 的直径, $AD \perp BC$ 于点 E .



(1) 求证: $\angle BAD = \angle CAD$;

(2) 连接 BO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 G , 连接 GC . 若 $\odot O$ 的半径为 5, $OE = 3$, 求 GC 和 BC 的长.

25. 某广场有一个小型喷泉, 水流从垂直于地面的水管 OA 喷出, OA 长为 1.5 米. 水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落到地面上, 某方向上抛物线路径的形状如图所示. 建立平面直角坐标系, 水流喷出的高度 y (米) 与水平距离 x (米) 之间近似满足函数关系 $y = ax^2 + x + c$ ($a \neq 0$).



下面是水流高度 y 和水平距离 x 之间的几组数据:

$x/\text{米}$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$y/\text{米}$	1.5	1.875	2	1.875	1.5	0.875	0

(1) 根据上述数据, 直接写出水流喷出的最大高度, 并求出满足的函数关系式 $y = ax^2 + x + c$ ($a \neq 0$);

(2) 由于调整了水压, 水流喷出高度 y 与水平距离 x 之间近似满足函数关系 $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1.5$, 调整后水流落点为 B' , 则 OB _____ OB' . (填 “>”, “=” 或 “<”)

26. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + b^2 - b$ ($a \neq 0$).

(1) 若 $b = 2a$, 求抛物线的对称轴;

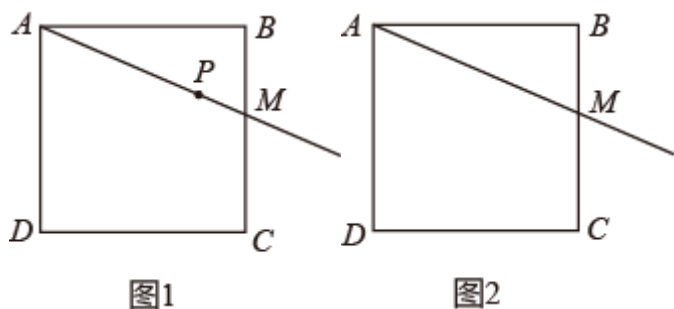
(2) 若 $a = 1$, 且抛物线的对称轴在 y 轴右侧, 点 $A(-3, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在抛物线上. 若 $y_1 > y_3 > y_2$, 求 b 的取值范围.

27. 在正方形 $ABCD$ 中, M 是 BC 边上一点, 且点 M 不与 B 、 C 重合, 点 P 在射线 AM 上, 将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AQ , 连接 BP , DQ .

(1) 如图 1, 当点 P 在线段 AM 上时, 依题意补全图 1;

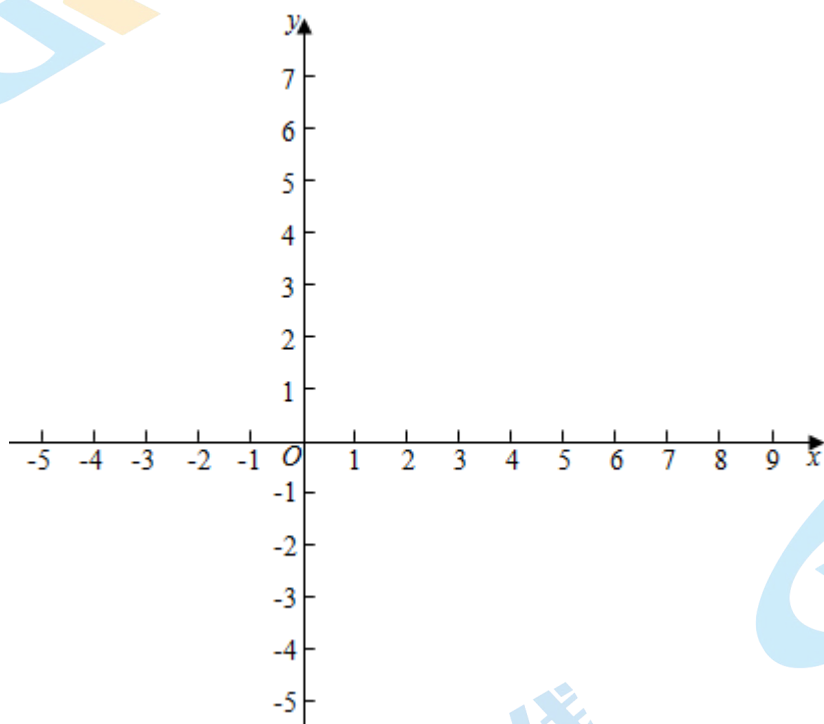
(2) 在图 1 的条件下, 延长 BP , QD 交于点 H , 求证: $\angle H = 90^\circ$.

(3) 在图2中, 当点 P 在线段 AM 的延长线上时, 连接 DP , 若点 P, Q, D 恰好在同一条直线上, 猜想 DP, DQ, AB 之间的数量关系, 并说明理由.



28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W , 给出如下定义: 点 P 是图形 W 上任意一点, 若存在点 Q , 使得 $\angle OQP$ 是直角, 则称点 Q 是图形 W 的“直角点”.

- (1) 已知点 $A(6,8)$, 在点 $Q_1(0,8)$, $Q_2(-4,2)$, $Q_3(8,4)$ 中, _____ 是点 A 的“直角点”;
- (2) 已知点 $B(-3,4)$, $C(4,4)$, 若点 Q 是线段 BC 的“直角点”, 求点 Q 的横坐标 n 的取值范围;
- (3) 在 (2) 的条件下, 已知点 $D(t,0)$, $E(t+1,0)$, 以线段 DE 为边在 x 轴上方作正方形 $DEFG$. 若正方形 $DEFG$ 上的所有点均为线段 BC 的“直角点”, 直接写出 t 的取值范围.



参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1 - 8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 【答案】A

【分析】根据中心对称图形的定义进行逐一判断即可.

【详解】解：A、是中心对称图形，故此选项符合题意；

B、不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C、不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

D、不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形的识别，解题的关键在于能够熟练掌握中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心.

2. 【答案】B

【分析】此题主要考查了关于原点对称点的性质，利用两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反，即点 $P(x, y)$ 关于原点 O 的对称点是 $(-x, -y)$ ，进而得出答案.

【详解】解：点 $P(-5, 2)$ 关于原点对称的点的坐标为： $(5, -2)$.

故选：B.

3. 【答案】D

【分析】根据圆的性质， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的一点，则 $\angle ACB = 90^\circ$ ，在 $\triangle ACB$ 中，运用内角和定理，结合 $\angle ABC = 70^\circ$ ，可得 $\angle BAC = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ABC) = 20^\circ$.

【详解】解： $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的一点，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABC = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ABC) = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

故选：D.

【点睛】本题考查了在圆中，直径所对的圆周角为直角，灵活运用该知识点是解题的关键.

4. 【答案】A

【分析】本题考查解一元二次方程，利用因式分解法求出方程的解，即可.

【详解】解： $\because x(x-1) = 0$ ，

$\therefore x = 0$ 或 $x - 1 = 0$ ，

$\therefore x_1 = 0, x_2 = 1$ ；

故选 A.

5. 【答案】B

【分析】根据圆周角定理可得 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ ，代值计算即可。

【详解】解：∵ $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle AOB = 100^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 50^\circ,$$

故选 B.

【点睛】本题考查了圆周角定理，同弧所对圆周角等于它所对圆心角的一半，解题的关键是熟练掌握相关定理。

6. 【答案】D

【分析】先移项，再等号两边同时加上一项系数的一半即可。

【详解】解： $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，

$$x^2 - 2x = 1,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2,$$

$$(x-1)^2 = 2,$$

故选：D.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的配方，熟练掌握完全平方公式是解题的关键。

7. 【答案】B

【分析】设绿化面积平均每年的增长率为 x ，根据题意列出方程，即可求解。

【详解】解：设绿化面积平均每年的增长率为 x ，根据题意得， $300(1+x)^2 = 363$

故选：B.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键。

8. 【答案】C

【分析】先确定方程两根的范围，然后再确定抛物线的对称轴，最后根据抛物线与 x 轴的两个交点关于对称轴对称即可解答。

【详解】解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $a(x-k)^2 - 1 = 0$ 的两根在数轴上对应的点分别在区域①和区域②，区域均含端点，

$$\therefore \text{一个根 } -1 < x_1 < 0, \text{ 另一个根 } 2 < x_2 < 3,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = a(x-k)^2 \text{ 的对称轴是直线 } x = k,$$

∴ 抛物线与 x 轴的两个交点关于对称轴对称，

∴ k 的值可能为 1.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了二次函数图像与一元二次方程的关系，掌握二次函数图像与 x 轴的交点关于对称轴对称是解答本题的关键。

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 【答案】(1, 2)

【分析】直接根据顶点公式的特点求顶点坐标.

【详解】 $\because y=3(x-1)^2+2$ 是抛物线的顶点式,

$\therefore$ 顶点坐标为 (1, 2).

故答案为: (1, 2).

【点睛】主要考查了求抛物线的顶点坐标、对称轴及最值的方法. 解题的关键是熟知顶点式的特点.

10. 【答案】 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

【分析】先把方程变形为 $x^2 = \frac{1}{4}$, 然后利用直接开平方法解方程.

【详解】解: $4x^2 = 1$,

$$x^2 = \frac{1}{4},$$

$$x = \pm \frac{1}{2},$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程-直接开平方法: 形如 $x^2=p$ 或 $(nx+m)^2=p$ ($p \geq 0$) 的一元二次方程可采用直接开平方的方法解一元二次方程.

11. 【答案】 $y=x^2$ (答案不唯一)

【分析】根据题意, 只要二次函数的解析式满足: 二次项系数为正, 常数项为 0 即可.

【详解】解: 设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

$\because$ 抛物线图象开口向上,

$\therefore a > 0$.

$\because$ 抛物线图象过原点,

$\therefore c = 0$.

取 $a=1$, $b=0$ 时, 二次函数的解析式为 $y=x^2$.

故答案为: $y=x^2$ (答案不唯一).

【点睛】本题考查了二次函数的图像特征及性质, 掌握二次函数的图像特征及性质是解题的关键.

12. 【答案】 $y=3x^2-2$ 或 $y=-2+3x^2$

【分析】本题主要考查了二次函数图象与几何变换, 根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【详解】解: 将抛物线 $y=3x^2$ 向下平移 2 个单位长度, 得到的抛物线解析式为 $y=3x^2-2$.

故答案为: $y=3x^2-2$

13. 【答案】8

【分析】此题考查了垂径定理和勾股定理，垂径定理“平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，且平分弦所对的两条弧”。连接 OA ，根据垂径定理可得 $OC \perp AB$ ，根据勾股定理求出 AC ，即可求解。

【详解】解：连接 OA ，

$\because \odot O$ 的直径为 10，

$\therefore OA = 5$ ，

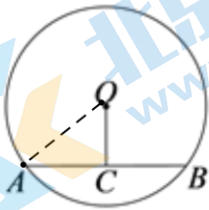
$\because C$ 是 AB 的中点，

$\therefore OC \perp AB$ ，

根据勾股定理可得： $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

$\therefore AB = 2AC = 8$ 。

故答案为：8。



14. 【答案】将 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° ，再沿 x 轴向右平移一个单位（答案不唯一）

【分析】根据旋转的性质，平移的性质即可得到由 $\triangle AOB$ 得到 $\triangle CDE$ 的过程。

【详解】解：将 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° ，再沿 x 轴向右平移一个单位得到 $\triangle CDE$ 。

故答案为：将 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° ，再沿 x 轴向右平移一个单位。

【点睛】考查了坐标与图形变化——旋转，平移，解题时需要注意：平移的距离等于对应点连线的长度，对称轴为对应点连线的垂直平分线，旋转角为对应点与旋转中心连线的夹角的大小。

15. 【答案】 $-3 < x < 0$

【分析】根据二次函数的对称性和图象性质判断即可；

【详解】 $\because$ 抛物线的对称轴为 $x = -1.5$ ，

$\therefore$ 点 $(0, 2)$ 关于直线 $x = -1.5$ 的对称点为 $(-3, 2)$ ，

当 $-3 < x < 0$ 时，函数值 y 大于2；

故答案是： $-3 < x < 0$ 。

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象性质，准确分析判断是解题的关键。

16. 【答案】36

【分析】根据题意得，只有第一天和第三天选择“高强度”，计算出此时的距离即可。

【详解】解：如果第二天和第三天选择低强度，则距离为 $6+6=12$ （km），

如果第三天选择高强度，则第二天休息，则距离为 15 km，

$\because 12 < 15$ ，

∴第二天休息，第三天选择高强度，

如果第四天和第五天选择低强度，则距离为 $5+4=9$ (km)，

如果第五天选择高强度，则第四天休息，则距离为 8km，

∵ $9>8$ ，

∴第四天和第五天选择低强度，

为保持最远距离，则第一天为高强度，

∴最远距离为 $12+0+15+5+4=36$ (km)

故答案为 36.

【点睛】本题考查了有理数的加法应用，解题的关键是理解题意并掌握有理数的加法.

三、解答题（共 68 分，第 17 - 22 题，每题 5 分；第 23 - 26 题，每题 6 分；第 27 - 28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 【答案】 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

【分析】根据因式分解法求解即可.

【详解】解：∵ $x^2 - 2x - 3 = 0$,

∴ $(x+1)(x-3) = 0$,

∴ $x+1=0$ 或 $x-3=0$,

∴ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程，常见的解法有：直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法，选择合适的解法解方程是解题的关键.

18. 【答案】 6

【分析】把 a 代入方程，得出 $2a^2 - 7a = 1$ ，再整体代入求值即可.

【详解】解： $a(2a-7)+5 = 2a^2 - 7a + 5$.

∵ a 是方程 $2x^2 - 7x - 1 = 0$ 的根

∴ $2a^2 - 7a - 1 = 0$.

∴ $2a^2 - 7a = 1$.

∴ 原式 $= 1 + 5 = 6$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解和代数式求值，解题关键是明确方程解的意义，整体代入求值.

19. 【答案】 (1) $m > -\frac{4}{3}$

(2) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

【分析】(1) 本题考查一元二次方程的根的判别式，当一元二次方程有两不相等的实数根时， $\Delta > 0$ ，据此列不等式，即可求解，掌握一元二次方程的根的判别式是解题的关键；

(2) 本题考查解一元二次方程，根据 (1) 中结论及当“ m 取负整数”确定 m 的值，再解方程即可，解题的关键是能够运用因式分解法解一元二次方程.

【小问1详解】

解：∵方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-3m) = 16 + 12m > 0,$$

$$\therefore m > -\frac{4}{3}.$$

【小问2详解】

解：∵ m 取负整数，且 $m > -\frac{4}{3}$ ，

$$\therefore m = -1,$$

$$\therefore \text{原方程化为 } x^2 + 4x + 3 = 0,$$

$$\text{即 } (x+1)(x+3) = 0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x+3=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = -3.$$

20. 【答案】见解析

【分析】本题考查了等边三角形的性质，旋转的性质，全等三角形的判定．明确全等三角形的判定条件是解题的关键．

由 $\triangle ABC$ 是等边三角形，可得 $AC = BC$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，由旋转的性质可知， $CD = CE$ ， $\angle DCE = 60^\circ$ ，则 $\angle DCE = \angle ACB$ ， $\angle BCD = \angle ACE$ ，证明 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ (SAS)即可．

【详解】证明：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AC = BC, \angle ACB = 60^\circ,$$

由旋转的性质可知， $CD = CE$ ， $\angle DCE = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle DCE = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DCE - \angle DCA = \angle ACB - \angle DCA, \text{ 即 } \angle ACE = \angle BCD,$$

$$\therefore AC = BC, \angle ACE = \angle BCD, EC = DC,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD \text{ (SAS)}.$$

21. 【答案】 $y = x^2 + 2x + 2$

【分析】本题考查了用待定系数法求函数解析式的方法及方程组的解法，将点(0,2)和点(1,5)代入解析式中，求出 b ， c 即可．

【详解】解：将(0,2)，(1,5)代入 $y = x^2 + bx + c$ 得，

$$\begin{cases} c = 2 \\ 1 + b + c = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases},$$

∴此二次函数解析式为 $y = x^2 + 2x + 2$.

22. 【答案】(1) 见解析; (2) $-1 \leq y \leq 3$

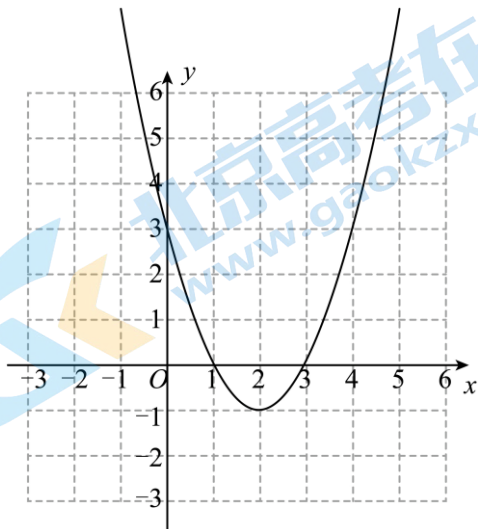
【分析】(1) 根据题目中的函数解析式可以将表格中补充完整, 然后描点、连线作出图象即可;

(2) 根据函数图象写出 y 的取值范围即可.

【详解】(1)

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	3	0	-1	0	3	...

画图



(2) $0 \leq x < 3$ 时, y 的取值范围是 $-1 \leq y \leq 3$.

故答案为: $-1 \leq y \leq 3$.

【点睛】本题考查了二次函数与不等式的关系, 二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的性质以及函数图象的作法是解题的关键.

23. 【答案】 AB 的长度为 1m .

【分析】本题考查一元二次方程的应用. 设 AB 的长为 $x\text{m}$, 从而可得 BC 的长度为 $(6-2x)\text{m}$, 再根据矩形的面积公式列方程求解即可.

【详解】解: 设 AB 的长为 $x\text{m}$, 根据题意, 得

$$x(6-2x) = 4,$$

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (不合题意, 舍去),

所以, AB 的长度为 1m .

24. 【答案】(1) 见解析 (2) $CG = 6, BC = 8$

【分析】本题主要考查了圆周角定理、垂径定理、三角形中位线定理.

(1) 根据垂径定理得到 $BD = CD$, 再根据圆周角定理证明结论;

(2) 根据垂径定理得到点 E 为 BC 的中点, 再根据三角形中位线定理可得 $CG = 2OE = 6$, 然后根据圆周

角定理得到 $\angle BCG = 90^\circ$ ，再根据勾股定理，即可求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径， $AD \perp BC$ ，

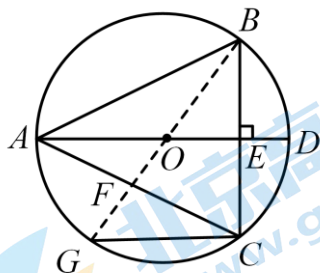
$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD.$$

【小问 2 详解】

解：如图，

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径， $AD \perp BC$ ，



$\therefore$ 点 E 为 BC 的中点，

$\because$ 点 O 是 BG 的中点，

$$\therefore CG = 2OE = 2 \times 3 = 6.$$

$\because BG$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BCG = 90^\circ.$$

$\because \odot O$ 的半径为 5，

$$\therefore BG = 10,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BG^2 - CG^2} = 8.$$

25. 【答案】(1) 2 米 (2) <

【分析】本题考查了二次函数的解析式的求法，顶点坐标的应用。

(1) 利用待定系数法解答，即可求解；

(2) 分别求出点 $B(3,0)$ ， $B'\left(\frac{15+3\sqrt{33}}{4}, 0\right)$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：水流喷出的最大高度为 2 米。

由题意可得，抛物线经过点 $(0,1.5)$ 和 $(3,0)$ ，

将上述两个点坐标代入 $y = ax^2 + x + c (a \neq 0)$ 中，得

$$\begin{cases} c = 1.5 \\ 9a + 3 + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ c = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{函数关系式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 对于 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3, x_2 = -1,$$

$$\therefore \text{点 } B(3, 0), \text{ 即 } OB = 3,$$

$$\text{对于 } y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1.5,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } -\frac{1}{3}x^2 + x + 1.5 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{15+3\sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{15-3\sqrt{33}}{4},$$

$$\therefore \text{点 } B'\left(\frac{15+3\sqrt{33}}{4}, 0\right), \text{ 即 } OB' = \frac{15+3\sqrt{33}}{4},$$

$$\therefore \frac{15+3\sqrt{33}}{4} > 3,$$

$$\text{即 } OB < OB'.$$

故答案为: <

26. 【答案】(1) 直线 $x = -1$

$$(2) -2 < b < 0$$

【分析】本题主要考查图象与二次函数系数之间的关系，二次函数的性质以及二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是：

(1) 根据对称轴公式即可求得；

(2) 根据题意得出 $\frac{-3+3}{2} < -\frac{b}{2} < \frac{-1+3}{2}$ ，即可得到 $-2 < b < 0$ 。

【小问 1 详解】

$$\text{解: 抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a},$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore x = -1,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$.

【小问 2 详解】

当 $a = 1$ 时, 抛物线 $y = x^2 + bx + b^2 - b$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2}$,

$\because$ 点 $(-3, y_1)$, $(-1, y_2)$, $(3, y_3)$ 在抛物线上, 且 $y_1 > y_3 > y_2$,

$$\therefore \frac{-3+3}{2} < -\frac{b}{2} < \frac{-1+3}{2},$$

$$\therefore -2 < b < 0.$$

27. 【答案】(1) 见衔接; (2) 见详解; (3) $DP^2 + DQ^2 = 2AB^2$, 理由见详解

【分析】(1) 根据要求画出图形, 即可得出结论;

(2) 由旋转的性质可得 $AQ = AP$, $\angle QAP = \angle DAB = 90^\circ$, 由 “SAS” 可证 $\triangle AQD \cong \triangle APB$, 可得 $PB = QD$, $\angle AQD = \angle APB$, 由平角的性质和四边形内角和定理可得 $\angle QHP = 90^\circ$, 即可得出结论;

(3) 连接 BD , 如图 2, 只要证明 $\triangle ADQ \cong \triangle ABP$, $\angle DPB = 90^\circ$, 利用勾股定理, 即可解决问题.

【详解】解: (1) 补全图形如图 1:

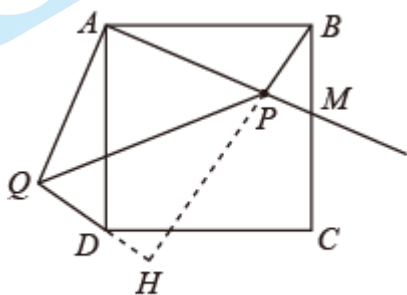


图1

(2) 如图 1, 延长 BP , QD 交于点 H ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD = AB, \angle DAB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AQ ,

$$\therefore AQ = AP, \angle QAP = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QAD = \angle BAP,$$

$$\therefore \triangle AQD \cong \triangle APB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore PB = QD, \angle AQD = \angle APB,$$

$$\therefore \angle APB + \angle APH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AQD + \angle APH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle QAP + \angle APH + \angle AQD + \angle H = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle H = 90^\circ;$$

$$(3) DP^2 + DQ^2 = 2AB^2.$$

证明：连接 BD ，如图 2，

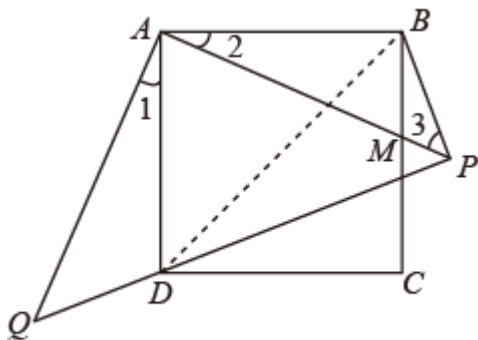


图2

$\because$ 线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到线段 AQ ,

$\therefore AQ=AP$, $\angle QAP=90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD=AB$, $\angle DAB=90^\circ$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore \triangle ADQ \cong \triangle ABP$ (SAS),

$\therefore DQ=BP$, $\angle Q=\angle 3$,

$\because$ 在 $Rt\triangle QAP$ 中, $\angle Q+\angle QPA=90^\circ$,

$\therefore \angle BPD=\angle 3+\angle QPA=90^\circ$,

在 $Rt\triangle BPD$ 中, $DP^2+BP^2=BD^2$,

又 $\because DQ=BP$, $BD^2=2AB^2$,

$\therefore DP^2+DQ^2=2AB^2$.

【点睛】此题是四边形综合题，主要考查正方形的性质，旋转变换、勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题。

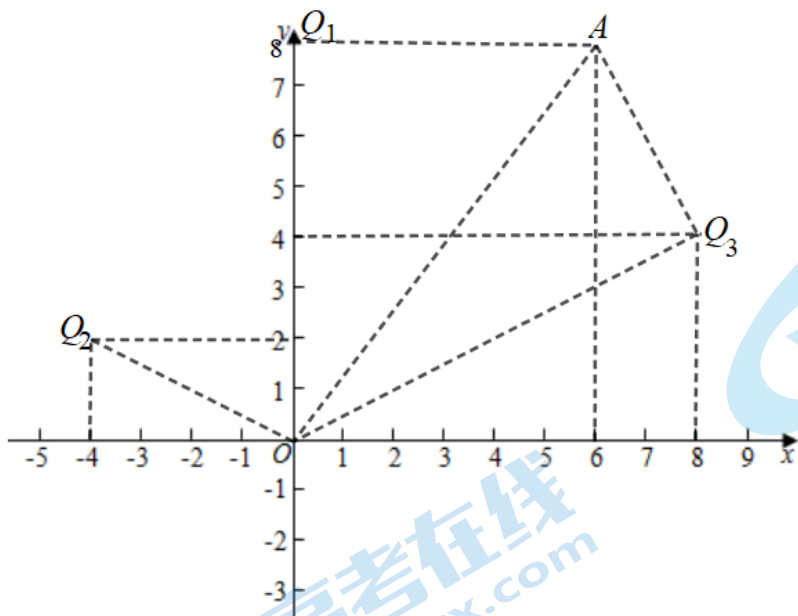
28. 【答案】(1) Q_1, Q_3 ; (2) $-4 \leq n \leq 2+2\sqrt{2}$; (3) $-3 \leq t \leq 1-\sqrt{7}$ 或 $\frac{-3+\sqrt{21}}{2} \leq t \leq 3$

【分析】(1) 在平面直角坐标系中画出相关点的坐标，根据定义就可以判断出结果。

(2) 根据题意画出点 Q 的位置轨迹，观察图形，满足题意有两种情况，分别计算即可。

(3) 根据题意画图，并结合第二问，发现当正方形在以 OB 和 OC 为直径的圆的相交部分的时候，是不满足题意的，所以找到个边界点，即可解题

【详解】解：(1) Q_1, Q_3 ，如下图：



(2) $\because \angle OQP = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 Q 在以 OP 为直径的圆上 (O, P 两点除外)

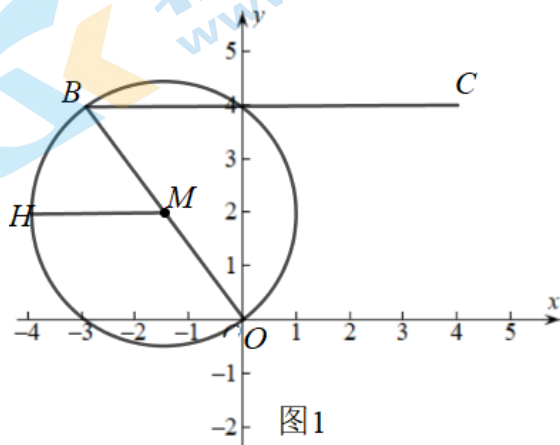


图1

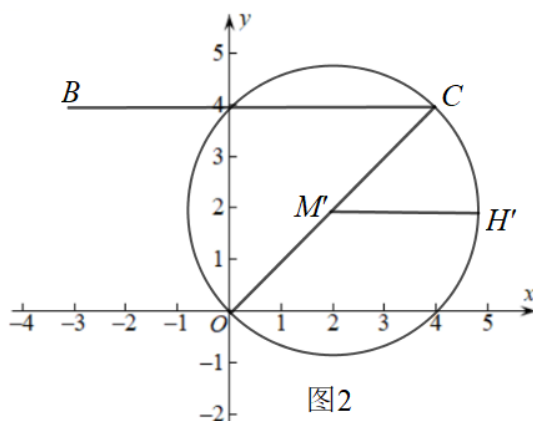


图2

如图1, 以 OB 为直径作 $\odot M$, 作 $MH \parallel x$ 轴, 交 $\odot M$ 于点 H (点 H 在点 M 左侧).

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-3, 4)$,

$\therefore \odot M$ 的半径为 $\frac{5}{2}$, 点 M 的坐标为 $(-\frac{3}{2}, 2)$.

$\therefore x_H = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4$.

如图2, 以 OC 为直径作 $\odot M'$, 作 $M'H' \parallel x$ 轴, 交 $\odot M'$ 于点 H' (点 H' 在点 M' 右侧).

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4, 4)$,

$\therefore \odot M'$ 的半径为 $2\sqrt{2}$, 点 M' 的坐标为 $(2, 2)$.

$\therefore x_{H'} = 2 + 2\sqrt{2}$.

$\therefore n$ 的取值范围是 $-4 \leq n \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

(3)

正方形 1 的左下端点为左边界，此时 $t_1 = -3$ 。

正方形 2 的右上端点在右边圆上，圆心坐标为 $(2, 2)$ ，则满足关系式：

$$\sqrt{(t+1-2)^2 + (1-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

化简得： $t^2 - 2t - 6 = 0$ ，

解得： $t_1 = 1 + \sqrt{7}$ (舍)， $t_2 = 1 - \sqrt{7}$ 。

正方形 3 的左端点在左边圆上，圆心坐标为 $(-\frac{3}{2}, 2)$ ，此时满足关系式：

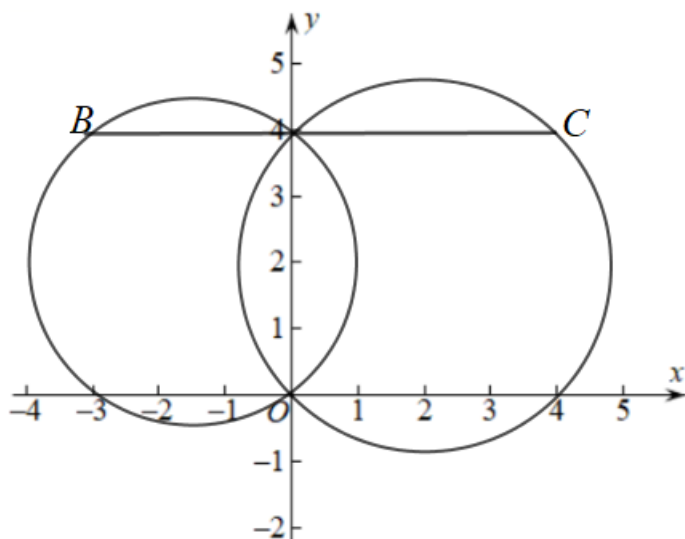
$$\sqrt{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + (1-2)^2} = \frac{5}{2},$$

化简得： $t^2 + 3t - 3 = 0$ ，

解得： $t_3 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ ， $t_4 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$ (舍)，

正方形 4 的右下端点在右边圆上，是右边界， $t+1 = 4$ ， $t = 3$ 。

综上所述：满足题意的解集是： $-3 \leq t \leq 1 - \sqrt{7}$ 或 $\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \leq t \leq 3$ 。



【点睛】本题是新定义题型的考查，能够根据题意画出相关图形，分类讨论是解题关键。

北京初三高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题 &答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

