2024 届高三一轮复习联考(一)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】特称命题的否定为全称命题，所以命题 p 的否定应该为 $\forall n\in\mathbf{N},n^2<2^n$.故选 C.

2.B 【解析】由 $i^3=-i,i^4=1$，得 $z=2+i^3+i^4=2-i+1=3-i$，所以 $|z|=\sqrt{10}$，故选 B.

3.A 【解析】由题意知 $A=\{x|x^2<9\}=(-3,3)$，$B=\{y|y=2^x+1\}=(1,+\infty)$，所以 $A\cup B=(-3,+\infty)$，故选 A.

4.D 【解析】∵角 θ 的终边经过点 $(1,\sqrt{3})$，∴$\cos\theta=\frac{1}{2},\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)$，当 k 为偶数时，$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，当 k 为奇数时，$\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}$，故选 D.

5.D 【解析】由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)=\frac{a}{e^{-x}+1}-1+\frac{a}{e^x+1}-1=a-2=0$，∴$a=2$，$g(x)=x^2-ax$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，即为 $(1,+\infty)$，故选 D.

6.B 【解析】由 $x^2-xy+2=0$，解得 $y=x+\frac{2}{x}$，又因为 $x>0$，所以 $x+\frac{1}{x}+y=\frac{3}{x}+2x\geqslant2\sqrt{6}$，当且仅当 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立，故选 B.

7.C 【解析】设 $f(x)=x\cdot\cos x+\sin x$，则 $f'(x)=2\cos x-x\sin x$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$，所以曲线 $y=x\cdot\cos x+\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 处的切线方程为 $y=-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$，即 $x+\frac{2}{\pi}y-\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}=0$，故选 C.

8.D 【解析】$\sin126°=\sin(90°+36°)=\cos36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\cos36°=1-2\sin^2 18°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，解得 $\sin^2 18°=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$，∵$\sin18°>0$，∴$\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，故选 D.

9.B 【解析】$f(x)=\frac{x}{e^x}+a(x-1)^2$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+2a(x-1)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}$，①当 $a\leqslant0$ 时，$2ae^x-1<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增；在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值点，符合题意；②当 $a=\frac{1}{2e}$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，此时，$f(x)$ 无极值点；③当 $a>\frac{1}{2e}$ 时，由 $f'(x)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}=0$，解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\ln(2a)$，且满足 $-\ln(2a)<1$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-\ln(2a)<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<-\ln(2a)$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(2a))$ 上单调递增，在 $(-\ln(2a),1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值点，不符合题意；④当 $0<a<\frac{1}{2e}$ 时，由 $f'(x)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}=0$，解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\ln(2a)$，且满足 $-\ln(2a)>1$，当 $x>-\ln(2a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<-\ln(2a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,-\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值点，符合

题意.综上，$a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)$.故选 B.

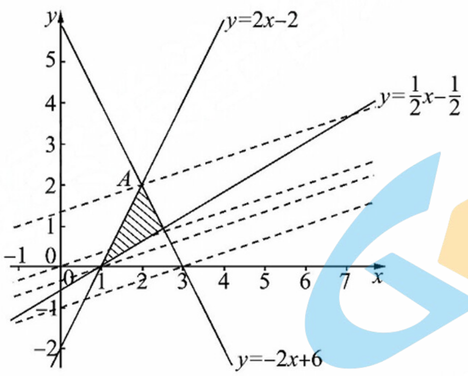
10.B 【解析】$f(x+1)+f(-3-x)=0$，所以 $f(x)$关于点$(-1,0)$中心对称；$f(x+1)=f(1-x)$，所以 $f(x)$关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(-x+2)=-f(x-4)$，故 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$是周期为 8 的周期函数，所以 $f\left(\dfrac{2\,023}{2}\right)=f\left(8\times126+\dfrac{7}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)=-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\left|\ln\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}\right)\right|=\ln\dfrac{5}{6}$，故选 B.

11.B 【解析】充分性：$x-y>1$，所以 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^{y+1}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^y>2\mathrm{e}^y$，由 $y>0$ 知，$\mathrm{e}^y>1$，所以 $2\mathrm{e}^y>\mathrm{e}^y+1$，故 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^y+1$，即 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y>1$，所以“$x-y>1$”是“$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y>1$”的充分条件；必要性：取 $x=2,y=1$，则 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}>1$，$x-y=1$，所以“$x-y>1$”不是“$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y>1$”的必要条件，综上，“$x-y>1$”是“$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y>1$”的充分不必要条件.故选 B.

12.D 【解析】$3<4<3\sqrt{3}$，所以 $a=\log_3 4\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$；因为$(0.8)^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{8}{5\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{64}{5}}>\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{49}{4}}=0.7$，$0.7>0.64=(0.8)^2$，即$(0.8)^{\frac{3}{2}}>0.7>(0.8)^2$，所以 $b=\log_{0.8}0.7\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$；$c=\log_8 7<1$，综上，$c<1<a<\dfrac{3}{2}<b$，故选 D.

13.-3 【解析】$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，两边平方得 $1-\sin2\alpha=\dfrac{1}{5}$，得 $\sin2\alpha=\dfrac{4}{5}$，所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin2\alpha=\dfrac{9}{5}$，因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha>0$，故 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-3$.

14.-4 【解析】根据不等式组得到的可行域如下图阴影部分所示，作出直线 $x-3y=0$ 并平移，由图可知，当平移后的直线经过点 A 时，z 取最小值，根据$\begin{cases}2x+y-6=0,\\2x-y-2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$所以 $z_{\min}=2-3\times2=-4$.



15.$\pi+1$ 【解析】函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$的最小正周期为 4π，所以$\dfrac{2\pi}{\omega}=4\pi$，解得 $\omega=\dfrac{1}{2}$，$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$向右平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位长度后得到 $g(x)=\sin\dfrac{x-\varphi}{2}$，当 $x\in(0,1)$时，$\dfrac{x-\varphi}{2}\in\left(-\dfrac{\varphi}{2},\dfrac{1-\varphi}{2}\right)$，又因为$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$\begin{cases}-\dfrac{\varphi}{2}\geqslant-\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi,\\\dfrac{1-\varphi}{2}\leqslant-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\pi+1-4k\pi\leqslant\varphi\leqslant3\pi-4k\pi$，$\because\varphi>0,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\varphi$ 的最小值为 $\pi+1$.

16.e^2 【解析】易知 $a>0$，由 $\mathrm{e}^{x+1}-a\ln x\geqslant a(\ln a-1)$可得$\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{a}+1-\ln a\geqslant\ln x$，即 $\mathrm{e}^{x+1-\ln a}+1-\ln a\geqslant\ln x$，则有

$e^{x+1-\ln a}+x+1-\ln a\geqslant x+\ln x$，设 $h(x)=e^x+x$，易知 $h(x)$ 单调递增，$h(x+1-\ln a)\geqslant h(\ln x)$，所以 $x+1-\ln a\geqslant \ln x$，即 $x-\ln x\geqslant \ln a-1$，设 $g(x)=x-\ln x$，易知 $g(x)\geqslant g(1)=1$，则有 $1\geqslant \ln a-1$，解得 $0<a\leqslant e^2$，故 a 的最大值为 e^2.

17.**解**：(1) $A=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cup[2,+\infty)$，…… 2分

当 $a=\sqrt{3}$ 时，$B=\{x\mid\sqrt{x+1}<\sqrt{3}\}=[-1,2)$，…… 4分

则 $A\cap B=\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$. …… 6分

(2)若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$. …… 7分

当 $B=\varnothing$，即 $a\leqslant 0$ 时，满足条件；…… 9分

当 $B\neq\varnothing$，即 $a>0$ 时，$B=[-1,a^2-1)$，若 $B\subseteq A$，则需 $a^2-1\leqslant\dfrac{3}{2}$，解得 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{10}}{2}$； …… 11分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right]$. …… 12分

18.**解**：(1) $f(x)=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos^2\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-4\sin\omega x\cos\omega x=-2\sqrt{3}\cos\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin 2\omega x=-\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sin 2\omega x=2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$， …… 2分

由题意知，$f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$， …… 3分

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， …… 4分

取 $k=1$，则 $\dfrac{11\pi}{12}\leqslant x\leqslant\dfrac{17\pi}{12}$，取 $k=0$，则 $-\dfrac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{5\pi}{12}\right]$，$\left[\dfrac{11\pi}{12},\pi\right]$. …… 6分

(2)由(1)知 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$， …… 8分

由 $y=\sin x$ 的对称性可知，$\left(2x_1-\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(2x_2-\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi$，解得 $x_1+x_2=\dfrac{5\pi}{6}$， …… 11分

所以 $\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}=\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. …… 12分

19.**解**：(1)当 $b=0$，$a=0$ 时，$f(x)=x^3+1$，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$， …… 1分

则 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大值为 $f(3)=28$. …… 3分

(2)当 $b=\dfrac{a^2}{4}$ 时，$f(x)=x^3-ax^2+\dfrac{a^2}{4}x+1$，$f'(x)=3x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}=3\left(x-\dfrac{a}{6}\right)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$. …… 4分

①当 $a=0$ 时，$f(x)=x^3+1=0$，解得 $x=-1$，此时 $f(x)$ 有 1 个零点；…… 5分

②当 $a<0$ 时，$\dfrac{a}{6}>\dfrac{a}{2}$，所以当 $x<\dfrac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递增，

当 $\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{6}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{6}\right)$ 上单调递减，当 $x>\dfrac{a}{6}$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$\left(\frac{a}{6},+\infty\right)$上单调递增，所以 $f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1$，$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1$. ………………… 7 分

当$-3\sqrt[3]{2}<a<0$，即$-54<a^3<0$ 时，$f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1>0$，$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1>0$，

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{6}\right)$，$\left(\frac{a}{6},+\infty\right)$均没有零点，………………………………………………………… 9 分

$\because f(a-1)=\frac{1}{4}a^3-\frac{5}{4}a^2+2a<0$，即 $f\left(\frac{a}{2}\right)f(a-1)<0$，

所以 $f(x)$在$\left(a-1,\frac{a}{2}\right)$上有一个零点，此时 $f(x)$有一个零点. ………………………………………… 11 分

综上，当$-3\sqrt[3]{2}<a\leqslant 0$ 时，$f(x)$有一个零点. ……………………………………………………………… 12 分

20.**解**：以筒车转轮的中心 O 为原点，与水面平行的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，

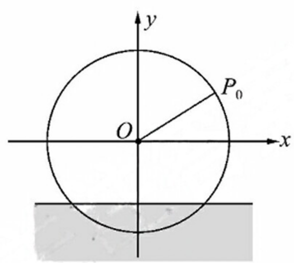
(1)设 $h=M\sin(\omega t+\varphi)+N$，$t\in[0,24]$，由题意知，$2M=8$，$M+N=6$，$\therefore M=4$，$N=2$，即 $h=4\sin(\omega t+\varphi)+2$，

…… 2 分

当 $t=0$ 时，$h=4\sin\varphi+2=4$，解得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，结合图像可知 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，……………………………………… 3 分

又因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=24$，所以 $\omega=\frac{\pi}{12}$， ………………………………………………………………………… 4 分

综上，$h=4\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)+2$，$t\in[0,24]$. ……………………………………………………………… 5 分



(2)经过 t s 后 A 距离水面的高度 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)+2$，由题意知$\angle AOB=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，所以经过 t s 后 B 距离水面的高度 $h'=4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{12}\right)+2$，………………………………………………………………… 6 分

则盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差为 $H=|h-h'|=4\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{12}\right)\right|$，

利用 $\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$，$H=4\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{12}\right)\right|=8\sin\frac{\pi}{8}\left|\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{24}\right)\right|$，…

…… 8 分

当$\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{24}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $t=-\frac{1}{2}+12k$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，H 取最大值 $8\sin\frac{\pi}{8}$(m). ……………………… 10 分

又因为 $t\in[0,24]$，所以当 $t=11.5$ 或 $t=23.5$ 时，H 取最大值，综上，盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差的最大值约为 $8\sin\frac{\pi}{8}$ m，此时 $t=11.5$ 或 $t=23.5$. ……………………………………………………………………… 12 分

21.**解**：(1)$f(x)=\ln(x+1)-ax+2$，定义域为$(-1,+\infty)$，

令 $t=x+1\in(0,+\infty)$，则 $f(x)=g(t)=\ln t-at+a+2$，

令 $g(t)=\ln t-at+a+2$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-a=\frac{-a\left(t-\frac{1}{a}\right)}{t}$， ………………………………………… 3 分

由 $g'(t)=0$，解得 $t=\frac{1}{a}>0$，

当 $0<t<\frac{1}{a}$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 单调递增； ………………………………………… 4 分

当 $t>\frac{1}{a}$ 时，$g'(t)<0$，所以 $g(t)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递减，

即 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递减， ………………………………………… 5 分

综上，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$. ………………………… 6 分

(2)由题意得 $ax\leqslant(x+1)[\ln(x+1)+2]$，

令 $t=x+1\in[1,+\infty)$，则 $a(t-1)\leqslant t(\ln t+2)$

当 $t=1$ 时，$a\cdot 0\leqslant 2$，$a\in\mathbf{R}$； ………………………………………… 7 分

当 $t>1$ 时，$a\leqslant\frac{t(\ln t+2)}{t-1}$，设 $h(t)=\frac{t(\ln t+2)}{t-1}$， ………………………………………… 8 分

$h'(t)=\frac{t-3-\ln t}{(t-1)^2}$，设 $\varphi(t)=t-3-\ln t$，$\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}>0$，则 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增， ……… 9 分

$\varphi(4)=1-\ln 4<0$，$\varphi(5)=2-\ln 5>0$，所以存在 $t_0\in(4,5)$ 使得 $\varphi(t_0)=0$，即 $t_0-3=\ln t_0$.

则有 $h(t)$ 在 $(0,t_0)$ 单调递减，在 $(t_0,+\infty)$ 单调递增，$h(t)\geqslant h(t_0)$，

所以 $a\leqslant h(t_0)=\frac{t_0(\ln t_0+2)}{t_0-1}=\frac{t_0(t_0-1)}{t_0-1}=t_0$， ………………………………………… 10 分

因为 $t_0\in(4,5)$，所以整数 a 的最大值为 4. ………………………………………… 12 分

22.**解**：(1)由 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 知，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=-2+\frac{1}{2}t,\end{cases}$ 可得曲线 C_1 的普通方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$. ……… 2 分

由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，化简得 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=2$，由 $x=\rho\sin\theta$，$y=\rho\cos\theta$ 知，曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y=2$. ………………………………………… 4 分

(2)将 $\theta=0$ 代入 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，得 $\rho=2$，所以点 A 的直角坐标为 $(2,0)$， ……………………… 5 分

故直线 AP 是倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线，且 $|PA|=2\sqrt{2}$，因为点 B 是曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点，且满足 $\angle APB=\frac{\pi}{6}$，

则直线 C_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$. ………………………………………… 7 分

将 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-2+t\sin\alpha,\end{cases}$ 代入曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y=2$，得 $t=\frac{4}{\cos\alpha+\sin\alpha}$，

当 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 时，$t=\frac{4\sqrt{6}}{3}$； ………………………………………… 8 分

当 $\alpha=\frac{5\pi}{12}$时,$t=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,所以$|PB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$, ………………………………………………………… 9 分

从而 $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}|PA||PB|\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ………………………………… 10 分

23.**解**:(1)当 $a=-1$ 时,$f(x)=|x+2|+|x|$, ………………………………………………………… 1 分

当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=2x+2\leqslant2x+3$,即 $2\leqslant3$,恒成立,所以 $x\geqslant0$; ………………………………… 2 分

当$-2\leqslant x<0$ 时,$f(x)=x+2-x=2\leqslant2x+3$,解得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$,所以$-\frac{1}{2}\leqslant x<0$; ……………………… 3 分

当 $x<-2$ 时,$f(x)=-2x-2\leqslant2x+3$,解得 $x\geqslant-\frac{5}{4}$,所以无解. ………………………………………… 4 分

综上,不等式 $f(x)\leqslant2x+3$ 的解集为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=|x-2a|+|x+a+1|\geqslant|(x-2a)-(x+a+1)|=|3a+1|$,当且仅当$(x-2a)(x+a+1)\leqslant0$ 时等号成立, ………………………………………………………………………………………… 7 分

由题意得$|3a+1|\geqslant|2a-1|$,两边平方化简得 $a^2+2a\geqslant0$,解得 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant0$, ……………………… 9 分

所以 a 的取值范围是$(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. ……………………………………………………… 10 分