

2023 北京九中高 一（下）期中

数 学

一、单选题（本大题共 10 小题，共 50.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 给出下列命题正确的是()

- A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ B. 若 $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$
C. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ D. 若 $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{c}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, A 为钝角, 则点 $P(\tan B, \cos A)$ ()

- A. 在第一象限 B. 在第二象限 C. 在第三象限 D. 在第四象限

3. 要得到函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 只需将函数 $y = \cos 2x$ 的图象()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 B. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

4. 函数 $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ 的最小正周期是()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

5. 已知 $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = 3$, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$ ()

- A. 5 B. $-\frac{1}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. -1

6. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是非零向量, 则 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ” 是 “ $\vec{b} = \vec{c}$ ” 的()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

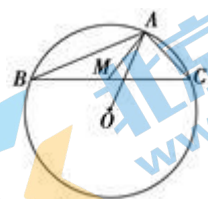
7. 已知 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{7}{25}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

8. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则下列结论错误的是()

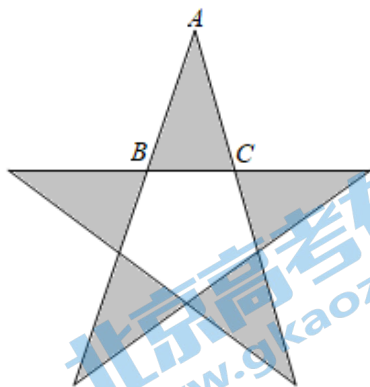
- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{3\pi}{8}, 0)$ 对称
B. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增
C. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-1, 1]$
D. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到的函数图象关于 y 轴对称

9. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O , $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{2}$, M 是线段 BC 的中点, 则 $\vec{AM} \cdot \vec{AO} =$ ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. 17世纪德国著名的天文学家开普勒曾经这样说过：“几何学里有两件宝，一个是勾股定理，另一个是黄金分割。如果把勾股定理比作黄金矿的话，那么可以把黄金分割比作钻石矿。”黄金三角形有两种，其中底与腰之比为黄金分割比的黄金三角形被认为是最美的三角形，它是一个顶角为 36° 的等腰三角形(另一种是顶角为 108° 的等腰三角形).例如，五角星由五个黄金三角形与一个正五边形组成，如图所示，在其中一个黄金 $\triangle ABC$ 中， $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.根据这些信息，可得 $\sin 234^\circ = ()$



- A. $\frac{1-2\sqrt{5}}{4}$ B. $-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ C. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ D. $-\frac{4+\sqrt{5}}{8}$

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

11. 已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$.

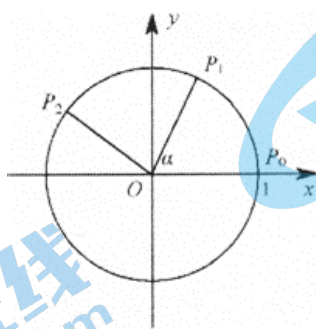
12. 已知向量 $\vec{a} = (\lambda, -2)$ ， $\vec{b} = (1, 3)$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知 α, β 都为锐角， $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ ，则 $\cos \beta$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

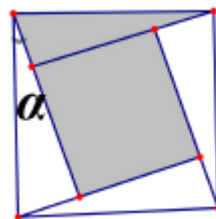
14. 求值： $\tan 55^\circ + \tan 65^\circ - \sqrt{3} \tan 55^\circ \tan 65^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 如图，点 P 是单位圆上的一个动点，它从初始位置 P_0 (单位圆与 x 轴正半轴的交点)开始沿单位圆按逆时针方向运动角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)到达点 P_1 ，然后继续沿单位圆逆时针方向运动 $\frac{\pi}{3}$ 到达点 P_2 ，若点 P_2 的横

坐标为 $-\frac{4}{5}$ ，则 $\cos \alpha$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



16. “勾股定理”在西方被称为“毕达哥拉斯定理”，三国时期吴国的数学家赵爽创制了一幅“勾股圆方图”，用数形结合的方法给出了勾股定理的详细证明. 如图所示的“勾股圆方图”中，四个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成一个大正方形. 若直角三角形中较小的锐角为 α ，现已知阴影部分与大正方形的面积之比为 $\frac{5}{8}$ ，则锐角 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题10.0分)

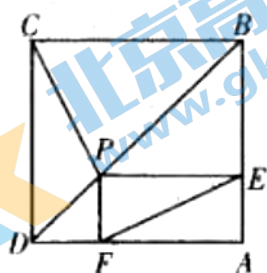
已知平面向量 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° .

(1)求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 与 $|\vec{a} + 3\vec{b}|$;

(2)求证: $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$.

18. (本小题12.0分)

如图, 已知: 正方形 $ABCD$ 边长为1, P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点, 四边形 $PFAE$ 为矩形。建立坐标系用向量法证明:



(1) $PC = EF$;

(2) $PC \perp EF$.

19. (本小题12.0分)

已知 α, β 为锐角, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$.

(1)求 $\cos\alpha$ 的值;

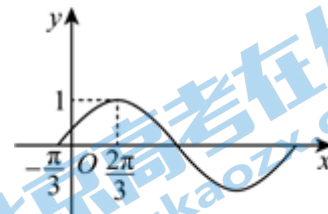
(2)求角 β .

20. (本小题12.0分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$)的部分图像如图所示.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)若 $x \in [0, \pi]$, 求函数 $f(x)$ 的最值.



21. (本小题12.0分)

22. 已知函数 $f(x) = 2\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$.

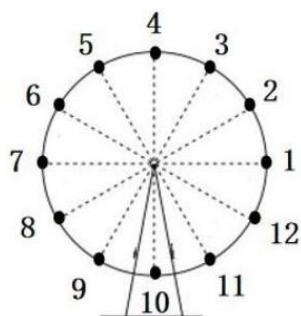
23. (I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

24. (II) 求 $f(x)$ 的单调递减区间

25. (III) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}]$ 上的最值.

22. (本小题14.0分)

某游乐场的摩天轮示意图如图, 已知该摩天轮的半径为30米, 轮上最低点与地面的距离为2米, 沿逆时针方向匀速旋转, 旋转一周所需时间为 $T = 24$ 分钟. 在圆周上均匀分布12个座舱, 标号分别为1 ~ 12(可视为点), 在旋转过程中, 座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系基本符合正弦函数模型, 现从图示位置, 即1号座舱位于圆周最右端时开始计时, 旋转时间为 t 分钟.



(1) 求1号座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系 $h(t)$ 的解析式;

(2) 在前24分钟内, 求1号座舱与地面的距离为17米时 t 的值;

(3) 记1号座舱与5号座舱高度之差的绝对值为 H 米, 求当 H 取得最大值时 t 的值.

参考答案

一、单选题（本大题共 10 小题，共 50.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查命题的真假判断，考查了平面向量的概念，是较易题.

由平面向量的基本概念逐一判断四命题得答案.

【解答】

解: A.若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$, 错误, 因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向可能不同;

B.若 $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$, 正确;

C.若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$, 错误, 方向可能反向;

D.若 $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{c}$, 错误; $\vec{b} = \vec{0}$ 时则不成立.

故选 B.

2. 【答案】D

【解析】解: $\because \triangle ABC$ 中, A 为钝角, $\therefore B$ 为锐角, $\tan B > 0$, $\cos A < 0$,

则点 $P(\tan B, \cos A)$ 在第四象限,

故选: D.

根据三角函数值的符号直接判断即可.

本题考查了三角函数值的符号, 是基础题.

3. 【答案】B

【解析】解: 将函数 $y = \cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 可得函数 $y = \cos 2(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象,

故选: B.

由条件根据函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 可得结论.

本题主要考查函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 属于基础题.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了二倍角的余弦公式, 余弦函数的周期性, 属于基础题.

利用二倍角的余弦公式化简 $f(x)$, 再求出 $f(x)$ 的最小正周期即可.

【解答】

解: 因为 $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

故选: A.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查两角和的正切公式，属于基础题。

根据两角和的正切公式即可得解。

【解答】

$$\text{解: } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1.$$

故选 D.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查了充分条件必要条件的判断，考查向量的运算，是基础题。

根据向量的运算以及充分条件必要条件的定义判断即可。

【解答】

$$\text{解: 若 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c},$$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0,$$

推不出 $\vec{b} = \vec{c}$ ，不是充分条件，

若 $\vec{b} = \vec{c}$ ，则 $\vec{b} - \vec{c} = 0$ ，则 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ ，是必要条件，

故 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 是非零向量，则 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ” 是 “ $\vec{b} = \vec{c}$ ” 的必要不充分条件，

故选：B.

7. 【答案】B

【解析】

本题主要考查两角差余弦公式，同角三角函数基本关系，二倍角公式，属于基础题。

根据题意利用两角差余弦公式可得 $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ ，对式子平方结合同角三角函数基本关系以及二倍角公式即可求解。

【解答】

$$\text{解: } \because \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{5},$$

$$\therefore (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = 1 + \sin 2\alpha = \frac{32}{25},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

故选 B.

8. 【答案】C

【解析】解：由题意知 $f(x) = \sin\omega x - \cos\omega x = \sqrt{2}\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $f(x)$ 的图象相邻两对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ (T 为 $f(x)$ 的最小正周期),

所以 $T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 2$,

于是 $f(x) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$,

因为 $f(-\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{2}\sin[2 \times (-\frac{3\pi}{8}) - \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\sin(-\pi) = 0$,

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{3\pi}{8}, 0)$ 对称, 故 A 正确;

由 $-\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$,

所以 $f(x)$ 的一个单调增区间为 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$,

又 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}] \subseteq [-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$,

所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增, 故 B 正确;

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $0 \leq 2x \leq \pi$,

所以 $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \leq 1$,

所以 $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$, 故 C 错误;

因为 $f(x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{2}\cos 2x$ 为偶函数,

所以 $y = -\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象关于 y 轴对称, 故 D 正确.

故选: C.

由题意利用两角差的正弦函数公式可求 $f(x) = \sqrt{2}\sin(\omega x - \frac{\pi}{4})$, 可求 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 利用正弦函数的周期公式

可求 ω 的值, 可得函数解析式 $f(x) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$,

由 $f(-\frac{3\pi}{8}) = 0$, 即可判断 A 正确;

由题意可求范围 $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$, 可得 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}] \subseteq [-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$, 即可判断 B 正确;

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 得 $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 利用正弦函数的性质可得 $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$, 即可判断 C 错误;

因为 $f(x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{2}\cos 2x$ 为偶函数, 即可判断 D 正确.

本题考查了正弦函数的性质以及函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换的应用, 考查了函数思想, 属于中档题.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了向量的平行四边形法则、三角形外接圆的性质、数量积运算和投影, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

由 M 是 BC 边的中点, 可得 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 取 AB , AC 的中点分别记作 M_1 , M_2 . 则 $OM_1 \perp AB$,

$OM_2 \perp AC$, 可得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = 6$, 同理求得 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$, 则答案可求.

【解答】

解：∵ M 是 BC 边的中点，∴ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ，

∵ O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，取 AB ， AC 的中点分别记作 M_1 ， M_2 ，连接 OM_1 ， OM_2 ，则 $OM_1 \perp AB$ ， $OM_2 \perp AC$ ，

$$\therefore \vec{AO} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| |\vec{AO}| \cos \angle BAO = |\vec{AB}| (|\vec{AO}| \cos \angle BAO) = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}_1| = |\vec{AB}| \cdot \frac{|\vec{AB}|}{2} = \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2 = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 = 6.$$

$$\text{同理可得 } \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} |\vec{AC}|^2 = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 = 4.$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AM} \cdot \vec{AO} &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AO} + \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot \vec{AO} \\ &= \frac{1}{2} \times (6 + 4) = 5. \end{aligned}$$

故选：C.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查三角函数的恒等变换，涉及二倍角余弦公式、诱导公式，考查解读信息与应用信息的能力，属于基础题.

由已知得 $\angle ACB = 72^\circ$ ，可得 $\cos 72^\circ$ 的值，再由二倍角余弦公式及三角函数的诱导公式求解 $\sin 234^\circ$.

【解答】

解：由图可知， $\angle ACB = 72^\circ$ ，且 $\cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，

$$\therefore \cos 144^\circ = 2\cos^2 72^\circ - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\therefore \sin 234^\circ = \sin(144^\circ + 90^\circ) = \cos 144^\circ = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

故答案选：C.

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

11. 【答案】1

【解析】解： $\tan \alpha = 2$ ，则 $\frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{4-1}{2+1} = 1$.

故答案为：1.

化简所求的表达式为正切函数的形式，代入求解即可.

本题考查三角函数的化简求值，考查计算能力.

12. 【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】解：∵ $\vec{a} = (\lambda, -2)$ ， $\vec{b} = (1, 3)$ ，

若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda - 6 = 0$ ，即 $\lambda = 6$ ，

∴ $\vec{a} = (6, -2)$ ，可得 $\vec{a} + \vec{b} = (7, 1)$ ，

则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$.

故答案为: $5\sqrt{2}$.

由已知利用斜率垂直与数量积的关系列式求解 λ 值,再由向量加法的坐标运算结合向量的模的计算公式求解.

本题考查两向量垂直与数量积的关系,考查向量模的求法,是基础题.

13. 【答案】 $\frac{56}{65}$

【解析】

【分析】

本题考查同角三角函数的基本关系与和差公式,属于基础题.

【解答】

解: 因为 α, β 都是锐角, 所以 $0 < \alpha + \beta < \pi$,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{12}{13},$$

所以 $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin \alpha$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{56}{65}.$$

故答案为: $\frac{56}{65}$

14. 【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

本题考查了两角和的正切公式, 属于基础题.

利用 $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta)$ 及特殊角的三角函数值进行计算.

【解答】

$$\text{解: } \because \tan 120^\circ = \tan(55^\circ + 65^\circ) = \frac{\tan 55^\circ + \tan 65^\circ}{1 - \tan 55^\circ \tan 65^\circ} = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan 55^\circ + \tan 65^\circ = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \tan 55^\circ \tan 65^\circ,$$

$$\therefore \tan 55^\circ + \tan 65^\circ - \sqrt{3} \tan 55^\circ \tan 65^\circ = -\sqrt{3}.$$

故答案为: $-\sqrt{3}$.

15. 【答案】 $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

【解析】

【分析】

本题考查任意角的正余弦以及两角和与差的余弦公式, 属于中档题.

先由正余弦的定义可得 P_2 的坐标, 再由任意角的三角求出 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\frac{4}{5}$, 由同角三角的平方关系求

出 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{3})} = \frac{3}{5}$, 然后再由两角差的余弦公式进行求解即可.

【解答】

解：由题意可知：点 P_2 的坐标为 $(\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}))$,

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$,

所以点 P_2 在第二象限,

已知点 P_2 的横坐标为 $-\frac{4}{5}$, 即 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\frac{4}{5}$,

所以 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{3})} = \frac{3}{5}$,

因此有 $\cos\alpha = \cos[(\alpha + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{3}] = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

16. 【答案】 $\frac{\pi}{12}$

【解析】

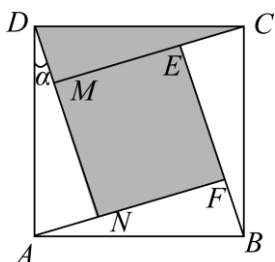
【分析】

本题考查了三角函数模型的应用, 考查了二倍角公式与三角函数的化简求值和证明, 属于中档题.

设 $\angle ADN = \alpha$, 大正方形边长为 a , 求出 DN , AN , 则 MN 可得, 即可求出阴影部分的面积, 再利用二倍角公式结合 α 的范围可得答案.

【解答】

解：如图所示：设 $\angle ADN = \alpha$, 大正方形边长为 a ,



则 $DN = a\cos\alpha$, $AN = a\sin\alpha$, $MN = a\cos\alpha - a\sin\alpha$,

则 $S_{\text{阴}} = (a\cos\alpha - a\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}(a\cos\alpha) \times (a\sin\alpha)$

$$\frac{S_{\text{阴}}}{S_{ABCD}} = \frac{(a\cos\alpha - a\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}(a\cos\alpha) \times (a\sin\alpha)}{a^2}$$

$= \frac{5}{8}$,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{8},$$

化为 $\frac{3}{4}\sin 2\alpha = \frac{3}{8}$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$,

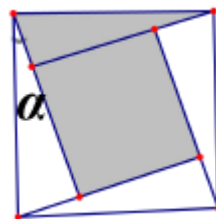
由题意 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, 则 $2\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

故 $2\alpha = \frac{\pi}{6}$, 解得 $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

故答案为 $\frac{\pi}{12}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 【答案】



解：(1)由题意， $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ；

$$|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{1 + 6 \times 1 + 9 \times 4} = \sqrt{43}.$$

(2)证明：由(1)得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，

$$\text{所以}(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 1 = 0,$$

故 $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$.

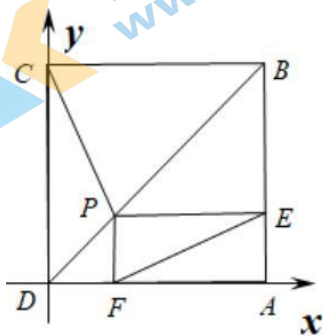
【解析】本题考查了向量的数量积，向量的模长，向量垂直的判定与证明，考查了运算能力，属于基础题.

(1)运用向量数量积公式带入计算即可得到 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ；根据 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 3\vec{b})^2}$ ，展开带入数据计算即可求解.

(2)根据 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ 即可得证.

18. 【答案】

解：以点D为原点，DA所在的直线为x轴建立平面直角坐标系，如图.



设 $C(0,1)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$,

(1)设 $|\vec{DP}| = r$, 则 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$,

$$\therefore \vec{PC} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}r, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}r),$$

$$\because E \text{ 点为 } (1, \frac{\sqrt{2}}{2}r), F(\frac{\sqrt{2}}{2}r, 0),$$

$$\therefore \vec{EF} = (\frac{\sqrt{2}}{2}r - 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}r),$$

$$\therefore |\vec{PC}| = \sqrt{(-\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}r)^2}, |\vec{EF}| = \sqrt{(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}r)^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2}$$

$$\therefore PC = EF,$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } \vec{PC} \cdot \vec{EF} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}r)(\frac{\sqrt{2}}{2}r - 1) + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}r)(-\frac{\sqrt{2}}{2}r) = -\frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}r - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{1}{2}r^2 = 0,$$

所以 $\vec{PC} \perp \vec{EF}$,

即 $PC \perp EF$.

【解析】本题考查向量的几何运用，向量垂直的判断与证明，平面向量的坐标运算，向量模与数量积的计算，属于中档题.

(1)利用 $AD \perp DC$ 建立坐标系，设正方形的边长为1，根据题意表示出正方形ABCD顶点的坐标，设

$|\vec{DP}| = r$, 求出点 E 、 F 的坐标, 由向量的坐标表示求出 $\vec{PA}$, $\vec{EF}$ 的坐标, 根据向量的模证明 $PA = EF$;

(2) 利用(1)求出 $\vec{PA}$, $\vec{EF}$ 的坐标, 利用数量积坐标运算求出 $\vec{PA} \cdot \vec{EF} = 0$, 即证出 $PA \perp EF$.

19. 【答案】

解: (1) 因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$,

$$\text{又 } \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{1 - (\frac{3\sqrt{3}}{14})^2} = \frac{13}{14},$$

$$\text{则 } \cos \alpha = \cos[(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3})\cos \frac{\pi}{3} - \sin(\alpha - \frac{\pi}{3})\sin \frac{\pi}{3} = \frac{13}{14} \times \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{7};$$

(2) 因为 α, β 为锐角, 所以 $0 < \alpha + \beta < \pi$, 则 $\sin(\alpha + \beta) > 0$,

$$\text{因为 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}, \text{ 所以 } \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{又 } \alpha \text{ 为锐角, } \cos \alpha = \frac{1}{7}, \text{ 所以 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

$$\text{故 } \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta)\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin \alpha$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{7} + \frac{11}{14} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

因为 β 为锐角, 所以 $\beta = \frac{\pi}{3}$.

【解析】本题考查了同角三角函数的基本关系及两角和与差的三角函数公式, 属于中档题.

(1) 一方面由题设条件可解得 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{13}{14}$, 另一方面, $\cos \alpha = \cos[(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}]$, 利用两角和的余弦公式展开即得所求;

(2) 要求角 β , 可以先求 $\sin \beta$, 而 $\sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha]$, 利用两角差的正弦公式展开即可, 结合 β 的范围即得所求.

20. 【答案】

解: (1) 由图像知, $f(x)$ 的最小正周期 $T = 4(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = 4\pi = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\therefore \omega = \frac{1}{2}.$$

又函数 $f(x)$ 过点 $(\frac{2\pi}{3}, 1)$,

$$\therefore \sin(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} + \varphi) = 1.$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}).$$

(2) $\because x \in [0, \pi]$,

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}.$$

$\because$ 函数 $y = \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减,

$$\text{又 } \because \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 函数 $y = \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上的最小值为 $\frac{1}{2}$, 最大值为 1.

∴函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ，最大值为1.

【解析】(1)由最值求 A ，由周期求 ω ，特殊点求 φ ；

(2)先求出 $\omega x + \varphi$ 的范围，再求 $f(x)$ 最大和最小值即可.

本题主要考查了正弦函数的性质在函数解析式求解中的应用，还考查了正弦函数的单调性在函数最值求解中的应用，属于中档题.

21. 【答案】

解：(I) $f(x) = 2\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$

$$= 2\cos x \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

(II)由(I)得 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\text{由 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{得 } k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}),$$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] \ (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{当 } x \in \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right],$$

$$\text{则 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 0].$$

故 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是-1，最大值是0.

【解析】本题考查了三角函数两角和差公式，二倍角公式，三角函数图象及其性质运用，三角函数单调性及其最值问题，考查了分析和运用能力，属于中档题.

(I)运用三角函数两角和差公式和二倍角公式将函数 $f(x)$ 化简，再根据 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 求解即可；

(II)根据函数 $f(x)$ 解析式，由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ ，解出 x 取值范围即可得到 $f(x)$ 的单调递减区间；根据 $x \in \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 得到 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ ，结合正弦函数性质即可得到此时 $f(x)$ 最值.

22. 【答案】

解：(1)设1号座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系的解析式为 $h(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + b$ ，($A > 0, \omega > 0, t \geq 0$),

则 $A = 30$, $b = 32$,

$$\therefore h(t) = 30\sin(\omega t + \varphi) + 32, (\omega > 0).$$

依题意最小正周期 $T = 24\text{min}$, $\omega = \frac{\pi}{12}(\text{rad/min})$,

当 $t = 0$ 时, $h(t) = 32$, $\therefore \varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 或 $\varphi = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (舍去),

$$\therefore h(t) = 30\sin\frac{\pi}{12}t + 32, (t \geq 0).$$

(2) 令 $h(t) = 17$, 即 $30\sin\frac{\pi}{12}t + 32 = 17$.

$$\therefore \sin\frac{\pi}{12}t = -\frac{1}{2},$$

$$\because 0 \leq t \leq 24, \therefore \frac{\pi}{12}t = \frac{7\pi}{6} \text{ 或 } \frac{11\pi}{6}, \text{ 解得 } t = 14 \text{ 或 } 22,$$

$\therefore t = 14$ 或 22 时, 1号座舱与地面的距离为17米.

$$(3) \text{依题意 } h_1 = 30\sin\frac{\pi}{12}t + 32, h_5 = 30\sin\frac{\pi}{12}(t+8) + 32,$$

$$\therefore H = |(30\sin\frac{\pi}{12}t + 32) - [30\sin\frac{\pi}{12}(t+8) + 32]| = 30\sqrt{3}|\sin(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{6})|,$$

令 $\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 结合 $t \geq 0$, 可解得 $t = 8 + 12k$, ($k \in \mathbb{N}$).

当 $t = 8 + 12k$ ($k \in \mathbb{N}$) 时, H 取得最大值.

【解析】本题考查三角函数的运用, 考查学生的计算能力, 属于中档题.

(1) 设1号座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系的解析式为 $h(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + b$, ($A > 0, \omega > 0, t \geq 0$), 根据所给条件求出 A, b, ω, φ , 即可得到函数解析式;

(2) 由(1)中的解析式令 $h(t) = 17$, 结合正弦函数的性质计算可得;

(3) 依题意可得 $h_1 = 30\sin\frac{\pi}{12}t + 32$, $h_5 = 30\sin\frac{\pi}{12}(t+8) + 32$, 从而得到 H 的表达式, 利用两角和差的正弦公式化简, 再结合正弦函数的性质求出函数取得最大值时 t 的值, 即可得解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯