

2019 北京二十七中学高三（上）期中

数 学

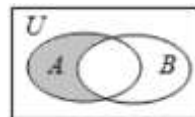
2019.11

第一部分

一、 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{0,1,2\}$ ， $B = \{2,3,4\}$ ，如图阴影部分所表示的集合为

- A. $\{2\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{3,4\}$ D. $\{0,1,2,3,4\}$



2. 若 $a > b$ ，则下列不等式正确的是

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $a^3 > b^3$ D. $a > |b|$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $b = \sqrt{7}$ ， $c = \sqrt{3}$ ， $B = \frac{\pi}{6}$ ，那么 a 等于

- A. 1 B. 2 C. 1 或 4 D. 4

4. 已知向量 $a = (x, 1)$ ， $b = (4, x)$ ，则 “ $x = 2$ ” 是 “ $a \parallel b$ ” 的

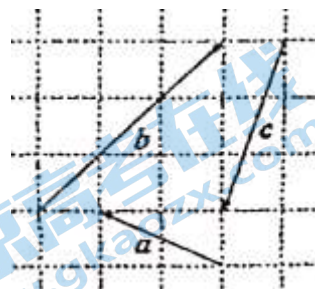
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 关于直线 l, m 及平面 α, β ，下列命题中正确的是

- A. 若 $l \parallel \alpha, \alpha \cap \beta = m$ ，则 α, β B. 若 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ ，则 $l \parallel m$
C. 若 $l \perp \alpha, l \parallel \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $l \parallel \alpha, m \perp l$ ，则 $m \perp \alpha$

6. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ($\lambda, \mu \in R$)，则 $\lambda + \mu =$

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{13}{9}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{9}{13}$



7. 在同一个坐标系中画出函数 $y = a^x, y = \sin ax$ 的部分图象，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，则下列所给图象中可能正确的是



8. 地震里氏震级是地震强度大小的一种度量，地震释放的能量 E （单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E = 4.8 + 1.5M$ 。已知两次地震的里氏震级分别为 8.0 级和 7.5 级，若它们释放的能量分别为 E_1 和 E_2 ，则 $\frac{E_1}{E_2}$ 的值所在的区间为

- A. $(1, 2)$ B. $(5, 6)$ C. $(7, 8)$ D. $(15, 16)$

第二部分

二、 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则 $f(x) =$ _____。

10. 已知角 α 的终边与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的交点为 $P(x, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，则 $\sin \alpha$ _____。

11. 已知平面向量 a, b 满足 $|a| = 1, |b| = 2$, a 与 b 的夹角为 60° , 则 $|2a + b| =$ _____.

12. 设 $(1 + 2x)^5 = a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 =$ _____; $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ _____.

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1 - x)$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) =$ _____.

14. 关于函数 $f(x) = |x|x + bx + c$, 给出下列四个命题;

① $b = 0, c > 0$ 时, $f(x) = 0$ 只有一个实数根;

② $c = 0$ 时, $y = f(x)$ 是奇函数;

③ $y = f(x)$ 的图象关于点 $(0, c)$ 对称;

④ 函数 $f(x)$ 至多有两个零点.

其中正确的命题序号为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}$

(I) 求 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ 的值;

(II) 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 求函数 $y = f(x)$ 的最值及取得最值时的 x 值.

16. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - bx^2 + 2x + a$, $x = 2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.

(I) 求 b 的值;

(II) 当 $x \in [1, 3]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

17. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{\pi}{4}$, $b = \sqrt{2}$.

(I) 求 a 的值;

(II) 求 $\sin C$ 及 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 13 分)

自由购是通过结算方式购物的一种形式，某大型超市为调查顾客使用自由购的情况，随机抽取了 100 人，统计结果整理如下：

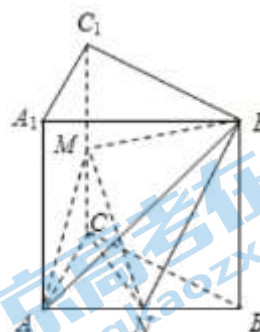
	20 以下	[20,30]	[30,40]	[40,50]	[50,60]	[60,70]	70 以上
使用人数	3	12	17	6	4	2	0
未使用人数	0	0	3	14	36	3	0

- (I) 现随机抽取 1 名顾客，试估计该顾客年龄在 $[30, 50]$ 且未使用自由购的概率；
- (II) 从被抽取的年龄在 $[50, 70]$ 使用自由购的顾客中，随机抽取 3 人进一步了解情况，用 X 表示这 3 人中年龄在 $[50, 60]$ 的人数，求随机变量 X 的分布列及数学期望；
- (III) 为鼓励顾客使用自由购，该超市拟对使用自由购的顾客赠送 1 个环保购物袋，若某日该超市预计有 5000 人购物，试估计该超市当天至少应准备多少个环保购物袋.

19. (本小题满分 14 分)

如图，已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $AC = BC = 2$ ， $AA_1 = 4$ ， $AB = 2\sqrt{2}$ ， M 、 N 分别是棱 CC_1 、 AB 中点.

- (I) 求证： $CN \perp$ 平面 ABB_1A_1 ；
- (II) 求证： $CN \parallel$ 平面 AMB_1 ；
- (III) 求三棱锥 $B_1 - AMN$ 的体积.



20. (本小题满分 14 分)

已知定义在 $(1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = x - \ln x - 2$ ， $g(x) = x \ln x + x$.

- (I) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程；
- (II) 求证： $f(x)$ 存在唯一零点，且零点属于 $(3, 4)$ ；
- (III) 若 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $g(x) > k(x - 1)$ 对任意的 $x > 1$ 恒成立，求 k 的最大值.