通州区 2022—2023 学年高三年级摸底考试

数学参考答案及评分标准

2023 年 1 月

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	B	A	D	C	B	A	A	C	C	B

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)$1-\mathrm{i}$　(12)2　(13)$[\mathrm{e},+\infty)$　(14)$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{2}$　(15)①③④

说明:(14)题两空前 3 后 2;(15)题全选对 5 分,漏选 3 分,其他情况 0 分。

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=\sin 2\omega x+2\cos^2\omega x$

$=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+1$

$=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$. 依题意,$\frac{\pi}{\omega}=\pi$,解得 $\omega=1$. …………………… 5 分

(Ⅱ)$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

把 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),

得到 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 的图象,…………………………………………………… 7 分

再把得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,得到 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$ 的图象,

即 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+1$. …………………………………………………… 9 分

由函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$. …………………… 10 分

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{12}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,得 $2k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{12}$. ……………………… 12 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{5\pi}{12},2k\pi+\frac{7\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$. ……………………… 13 分

(17)(本小题 14 分)

解:(Ⅰ)取 AP 中点 E,连接 EN,BE.

因为 N 为 PD 中点,所以有 $EN/\!/AD$ 且 $EN=\frac{1}{2}AD$.

因为 $BM/\!/AD$,$BM=\frac{1}{2}AD$,所以 $EN/\!/BM$ 且 $EN=BM$.

所以四边形 $BMNE$ 为平行四边形.
所以 $BE/\!/MN$.
又因为 $MN\not\subset$平面 PAB,$BE\subset$平面 PAB,
所以 $MN/\!/$平面 PAB. ……………………………………………………………………… 4 分
(Ⅱ)选择条件①:$AD\perp MN$
因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,$ABCD$ 为矩形
所以 $AB\perp$平面 PAD.
所以 $AB\perp PA$.
又因为 $AD\perp MN$,由(Ⅰ)可知 $BE/\!/MN$,$BE\subset$平面 PAB,
所以 $AD\perp BE$,又因为 $AD\perp AB$,$AB\cap BE=B$,
所以 $AD\perp$平面 PAB.
所以 $PA\perp AD$. ……………………………………………………………………………… 8 分
以 A 为原点,以 AB,AD,AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立坐标系,则 $A(0,0,0)$,$M(2,2,0)$,$N(0,2,2)$,
则$\overrightarrow{AM}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AN}=(0,2,2)$,设面 AMN 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=2x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=2z+2y=0\end{cases}$,
令 $y=1$,则 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$, ………………………………………………………… 12 分
因为 $AP\perp$平面 $ABCD$,
则平面 AMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………… 14 分

选择条件②:$AM=AN$.
因为平面 $ABCD\perp$平面 PAD,$ABCD$ 为矩形
所以有 $AB\perp$平面 PAD.
所以 $AB\perp PA$.
又因为 $AM=AN$,
取 AD 中点为 G,连接 MG,NG,
则有 $MG=AG=2$,$NG/\!/PA$.
所以$\triangle ANG\cong\triangle AMG$.
所以$\angle AGM=\angle AGN=90^\circ$
所以 $PA\perp AD$. ……………………………………………………………………………… 8 分
以 A 为原点,以 AB,AD,AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立坐标系,则 $A(0,0,0)$,$M(2,2,0)$,$N(0,2,2)$,
则$\overrightarrow{AM}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AN}=(0,2,2)$,设面 AMN 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=2x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=2z+2y=0\end{cases}$,
令 $y=1$,则 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$,
则平面 AMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………… 14 分

(18)(本小题 13 分)

解:(1)设“买家对 A 平台的评价不是差评”为事件 C,则

$P(C)=1-\frac{5}{100}=\frac{19}{20}$ ………………………………………………………………………… 3 分

(2)设“这 4 人中恰有 2 人给出好评”为事件 D,由已知数据估计,买家在 A 平台好评的概率 $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$,买家在 B 平台好评的概率 $\frac{64}{80}=\frac{4}{5}$,$D$ 事件包含:A 平台 2 个好评,B 平台 0 个好评;A 平台 1 个好评,B 平台 1 个好评;A 平台 0 个好评,B 平台 2 个好评.

$P(D)=(\frac{3}{4})^2(1-\frac{4}{5})^2+C_2^1\frac{3}{4}(1-\frac{3}{4})C_2^1\frac{4}{5}(1-\frac{4}{5})+(1-\frac{3}{4})^2(\frac{4}{5})^2$

$=\frac{73}{400}$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

(3)设一位买家对 A 平台的满意度评分为 X,一位买家对 B 平台的满意度评分为 Y,

X	5	3	1
P	0.75	0.2	0.05

Y	5	3	1
P	0.8	0.1	0.1

则 $EX=4.4$,$EY=4.4$.$DX=1.24$,$DY=1.64$.

从买家对两个平台满意度得分看两个平台均分相等,但 $DX<DY$.

所以选择 A 平台. ……………………………………………………………………………… 13 分

注:

1.若在均值相等的条件下,没有计算方差,只从好评率高的角度选择 B 平台,不扣分

2.若在均值相等的条件下,没有计算方差,只从差评率低的角度选择 A 平台,不扣分;

3.若没有计算均值和方差,只从好评率、差评率的角度选择 A,B 平台给 2 分.

(19)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)由题设,$\begin{cases}2a=4,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以求椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $P(m,n)(m\neq\pm2)$,可知 $3m^2+4n^2=12$. ……………………………………… 6 分

依题意可知,AP 的直线方程为 $y=\frac{n}{m+2}(x+2)$,

BP 的直线方程为 $y=\frac{n}{m-2}(x-2)$. ………………………………………………… 8 分

令 $x=4$,可得 $M=(4,\frac{6n}{m+2})$,$N(4,\frac{2n}{m-2})$. ……………………………………… 10 分

假设以 MN 为直径的圆过定点,不妨设定点为 $Q(x_0,y_0)$

依题意可知,$MQ\perp NQ$,所以 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$. ………………………………… 11 分

$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=(x_0-4,y_0-\frac{6n}{m+2})\cdot(x_0-4,y_0-\frac{2n}{m-2})$

$=(x_0-4)^2+y_0^2-\frac{8mn-8n}{m^2-4}y_0+\frac{12n^2}{m^2-4}$

因为 $3m^2+4n^2=12$，

所以$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=(x_0-4)^2+y_0^2-\frac{8mn-8n}{m^2-4}y_0-9$.

因为$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$，

所以$(x_0-4)^2+y_0^2-\frac{8mn-8n}{m^2-4}y_0-9=0$. ………………………………………… 13 分

令 $y_0=0$，可得$(x_0-4)^2=9$，解得 $x_0=1$，$x_0=7$. ……………………………………… 14 分

所以以 MN 为直径的圆过定点$(1,0)$，$(7,0)$. ………………………………………… 15 分

(20)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)当 $a=0$，$f(x)=\frac{2x}{(x+1)^2}$，则 $f(0)=0$，

因为 $f'(x)=\frac{-2x+2}{(x+1)^3}$，

所以 $f'(0)=2$.

所以曲线 $y=f(x)$在$(0,0)$的切线方程为 $y=2x$. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)函数定义域为$\{x|x\neq-1\}$. ……………………………………………………………… 5 分

$f'(x)=\frac{(-2x+2a+2)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-2(x-a-1)(x+1)}{(x+1)^4}$，……………………………… 6 分

令 $f'(x)=0$，解得：$x=a+1$. ……………………………………………………………… 7 分

当 $a+1=-1$ 即 $a=-2$ 时

$f'(x)=\frac{-2x-2}{(x+1)^3}=\frac{-2(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-2}{(x+1)^2}<0$.

所以函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$，无单调递增区间.

当 $a+1<-1$ 即 $a<-2$ 时，

函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,a+1)$和$(-1,+\infty)$，………………………… 8 分

单调递增区间为$(a+1,-1)$.

当 $a+1>-1$ 即 $a>-2$ 时，…………………………………………………………………… 9 分

函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$和$(a+1,+\infty)$，

单调递增区间为$(-1,a+1)$. ………………………………………………………………… 10 分

综上所述：

$a=-2$ 时，函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$，无单调递增区间.

$a<-2$ 时，函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,a+1)$和$(-1,+\infty)$，单调递增区间为$(a+1,-1)$.

$a>-2$ 时，函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$和$(a+1,+\infty)$，单调递增区间为$(-1,a+1)$.

(Ⅲ)函数定义域为$\{x|x\neq-1\}$.

由题意，函数存在极小值，

则在极小值点有定义，且在该点左侧函数单调递减，在该点右侧函数单调递增. …… 12 分

由（Ⅱ）可知，当 $a<-2$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=a+1$ 处取得极小值. …… 14 分

即 $f(x)_{极小值}=f(a+1)=\dfrac{2(a+1)-a}{(a+1+1)^2}=\dfrac{a+2}{(a+2)^2}=\dfrac{1}{a+2}<0$. …… 15 分

(21)（本小题 15 分）

（Ⅰ）存在，比如 1，2，4，8 为 8 的所有约数即 $a=8$. …… 3 分

（Ⅱ）易知 $a_1=1, a_k=a, a_{k-1}=\dfrac{a}{a_2}, a_{k-2}=\dfrac{a}{a_3}$ …… 5 分

因为 $k\geqslant 4$，依题意可知$\dfrac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=\dfrac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}-a_{k-2}}$.

所以$\dfrac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=\dfrac{a-\dfrac{a}{a_2}}{\dfrac{a}{a_2}-\dfrac{a}{a_3}}$.

化简可得$(a_3-a_2)^2=(a_2-1)^2a_3$，

所以 $a_3=\left(\dfrac{a_3-a_2}{a_2-a_1}\right)^2$.

因为 $a_3\in\mathbf{N}^*$，所以$\dfrac{a_3-a_2}{a_2-a_1}\in\mathbf{N}^*$，

因此可知 a_3 是完全平方数. …… 7 分

由于 a_2 是整数 a 的最小非 1 因子，a_3 是 a 的因子，且 $a_3>a_2$，所以 $a_3=a_2^2$.

所以 $a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots, a_k-a_{k-1}$ 为 $a_2-1, a_2^2-a_2, \cdots, a_2^{k-1}-a_2^{k-2}$.

所以 $a=a_2^{k-1}(k\geqslant 4)$. …… 9 分

（Ⅲ）易知 $a_1a_k=a, a_2a_{k-1}=a, \cdots, a_ia_{k+1-i}=a, \cdots(1\leqslant i\leqslant k)$，

所以 $A=\dfrac{a^2}{a_{k-1}a_k}+\dfrac{a^2}{a_{k-2}a_{k-1}}+\cdots+\dfrac{a^2}{a_1a_2}$.

因为$\dfrac{1}{a_1a_2}\leqslant\dfrac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}, \cdots, \dfrac{1}{a_{k-1}a_k}\leqslant\dfrac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}a_k}=\dfrac{1}{a_{k-1}}-\dfrac{1}{a_k}$.

所以 $A=\dfrac{a^2}{a_{k-1}a_k}+\dfrac{a^2}{a_{k-2}a_{k-1}}+\cdots+\dfrac{a^2}{a_1a_2}=a^2\left(\dfrac{1}{a_{k-1}a_k}+\dfrac{1}{a_{k-2}a_{k-1}}+\cdots+\dfrac{1}{a_1a_2}\right)$

$\leqslant a^2\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{k-1}}-\dfrac{1}{a_k}\right)=a^2\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_k}\right)$

因为 $a_1=1, a_k=a$，

所以$\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_k}<1$.

所以 $A\leqslant a^2\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_k}\right)<a^2$.

即 $A<a^2$. …… 15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯