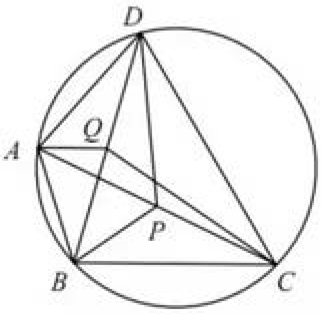
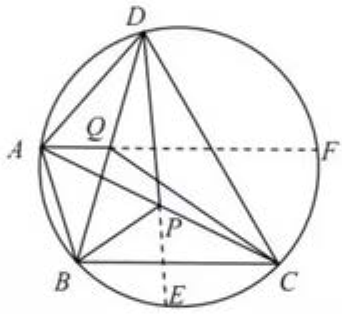
加 试

一、（本题满分 40 分） 如图，P,Q 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 的中点．若 $\angle BPA = \angle DPA$，证明：$\angle AQB = \angle CQB$．





证明 延长线段 DP 与圆交地另一点 E，则 $\angle CPE = \angle DPA = \angle BPA$，又 P 是线段 AC 的中点，故 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CE}$，从而 $\angle CDP = \angle BDA$．　　…………………10 分

又 $\angle ABD = \angle PCD$，所以 $\triangle ABD \backsim \triangle PCD$，于是 $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{PC}{CD}$，即

$$AB \cdot CD = PC \cdot BD$$　　…………………20 分

从而有

$$AB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AC \cdot (\frac{1}{2} BD) = AC \cdot BQ,$$

即

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CD}.$$

又 $\angle ABQ = \angle ACD$，所以 $\triangle ABQ \backsim \triangle ACD$，所以 $\angle QAB = \angle DAC$．　　…………………30 分

延长线段 AQ 与圆交于另一点 F，则 $\angle CAB = \angle DAF$，故 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}$．

又因为 Q 为 BD 的中点，所以 $\angle CQB = \angle DQF$．

又 $\angle AQB = \angle DQF$，所以 $\angle AQB = \angle CQB$．　　…………………40 分

二、（本题满分 40 分）证明：对任意整数，存在一个次多项式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

具有如下性质：

（1）$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 均为正整数；

（2）对任意正整数，及任意 $k\ (k\geq 2)$ 个互不相同的正整数 $r_1,r_2,\cdots,r_k$，均有

$$f(m)\neq f(r)_1 f(r_2)\cdots f(r_k).$$

证明 令

$$f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+2\,, \qquad ①$$

…………………10 分

将①的右边展开即知 $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的正整数系数的 n 次多项式.

下面证明 $f(x)$ 满足性质（2）.

对任意整数 t，由于 $n\geq 4$，故连续的 n 个整数 $t+1,t+2,\cdots,t+n$ 中必有一个为 4 的倍数，从而由①知 $f(t)\equiv 2\pmod 4$.　…………………20 分

因此，对任意 $k\ (k\geq 2)$ 个正整数 $r_1,r_2,\cdots,r_k$，有

$$f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)\equiv 2^k\equiv 0\pmod 4.$$

但对任意正整数 m，有 $f(m)\equiv 2\pmod 4$，故

$$f(m)\not\equiv f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)\pmod 4,$$

从而 $f(m)\neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$.

所以 $f(x)$ 符合题设要求.　…………………40 分

三、（本题满分 50 分）设$a_1,a_2,\cdots,a_n\,(n\ge 4)$是给定的正实数，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．对任意正实数，满足$\dfrac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r\,(1\le i<j<k\le n)$的三元数组$(i,j,k)$的个数记为$f_n(r)$．

证明：$f_n(r)<\dfrac{n^2}{4}$．

证明 对给定的$j\ (1<j<n)$，满足$1\le i<j<k\le n$，且

$$\frac{a_j-a_i}{a_k-a_j}=r \qquad ①$$

的三元数组(i,j,k)的个数记为$g_j(r)$． …………………10 分

注意到，若i,j固定，则显然至多有一个k使得①成立．因$i<j$，即i有$j-1$种选法，故$g_j(r)\le j-1$．

同样地，若j,k固定，则至多有一个i使得①成立．因$k>j$，即k有$n-j$种选法，故$g_j(r)\le n-j$．从而

$$g_j(r)\le \min\{j-1,n-j\}\,.$$ …………………30 分

因此，当n为偶数时，设$n=2m$，则有

$$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m-1}g_j(r)+\sum_{j=m}^{2m-1}g_j(r)$$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m-1}(2m-j)=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}$$

$$=m^2-m<m^2=\frac{n^2}{4}\,.$$ …………………40 分

当n为奇数时，设$n=2m+1$，则有

$$f_n(r)=\sum_{j=2}^{n-1}g_j(r)=\sum_{j=2}^{m}g_j(r)+\sum_{j=m+1}^{2m}g_j(r)$$

$$\le\sum_{j=2}^{m}(j-1)+\sum_{j=m+1}^{2m}(2m+1-j)$$

$$=m^2=\frac{n^2}{4}\,.$$ …………………50 分

四、（本题满分 50 分）设 A 是一个 3×9 的方格表，在每一个小方格内各填一个正整数．称 A 中的一个 $m\times n\ (1\le m\le 3, 1\le n\le 9)$ 方格表为“好矩形”，若它的所有数的和为 10 的倍数．称 A 中的一个的小方格为“坏格”，若它不包含于任何一个“好矩形”．求 A 中“坏格”个数的最大值．

解 首先证明 A 中“坏格”不多于 25 个．

用反证法．假设结论不成立，则方格表 A 中至多有 1 个小方格不是“坏格”．由表格的对称性，不妨假设此时第 1 行都是“坏格”．

设方格表 A 第 i 列从上到下填的数依次为 a_i, b_i, c_i，$i=1,2,\cdots,9$．记

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i, T_k=\sum_{i=1}^{k}(b_i+c_i),\ k=0,1,2,\cdots,9\text{，这里 } S_0=T_0=0\text{．}$$ ··········10 分

我们证明：三组数 $S_0,S_1,\cdots,S_9$；$T_0,T_1,\cdots,T_9$ 及 $S_0+T_0,S_1+T_1,\cdots,S_9+T_9$ 都是模 10 的完全剩余系．

事实上，假如存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $S_m\equiv S_n\pmod{10}$，则

$$\sum_{i=m+1}^{n}a_i=S_n-S_m\equiv 0\pmod{10}\text{，}$$

即第 1 行的第 $m+1$ 至第 n 列组成一个“好矩形”，与第 1 行都是“坏格”矛盾． ······20 分

又假如存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $T_m\equiv T_n\pmod{10}$，则

$$\sum_{i=m+1}^{n}(b_i+c_i)=T_n-T_m\equiv 0\pmod{10}\text{，}$$

即第 2 行至第 3 行、第 $m+1$ 列至第 n 列组成一个“好矩形”，从而至少有 2 个小方格不是“坏格”，矛盾．

类似地，也不存在 $m,n,\ 0\le m<n\le 9$，使 $S_m+T_m\equiv S_n+T_n\pmod{10}$． ·············30 分

因此上述断言得证．故

$$\sum_{k=0}^{9}S_k\equiv\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv 0+1+2+\cdots+9\equiv 5\pmod{10}\text{，}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{9}(S_k+T_k)\equiv\sum_{k=0}^{9}S_k+\sum_{k=0}^{9}T_k\equiv 5+5\equiv 0\pmod{10}\text{，}$$

矛盾！故假设不成立，即“坏格”不可能多于 25 个． ····················40 分

另一方面，构造如下一个 3×9 的方格表，可验证每个不填 10 的小方格都是“坏格”，此时有 25 个“坏格”．

1	1	1	2	1	1	1	1	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	10	1	1	1	1	2

综上所述，“坏格”个数的最大值是 25． ····················50 分