

数学试卷

2023 年 1 月

本试卷共 4 页,共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,请将答题卡交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x < 1\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $\{x \mid 0 < x < 1\}$ (B) $\{x \mid -2 < x < 3\}$
(C) $\{x \mid 1 < x < 3\}$ (D) $\{x \mid -2 < x < 0\}$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_6 = 8$, $a_3 + a_4 = 3$, 则 $\{a_n\}$ 的通项为

- (A) $5n - 16$ (B) $5n - 11$ (C) $3n - 8$ (D) $3n - 5$

(3) 已知抛物线 $C: x^2 = 8y$, 则 C 的焦点坐标为

- (A) $(4, 0)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(2, 0)$ (D) $(0, 2)$

(4) 已知向量 a, b 满足 $a + b = (2, -4)$, $3a - b = (-10, 16)$, 则 $a \cdot b$ 等于

- (A) -13 (B) 13 (C) -29 (D) 29

(5) 设 n 为正整数, $(2x^2 + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中存在常数项, 则 n 的最小值为

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(6) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 3$, $c = \sqrt{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 则 a 等于

- (A) $\frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{6}$

(7) “ $a > 2$ ”是“ $2^a - a - 1 > 0$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 已知半径为 1 的圆经过点 $(2, 3)$, 则其圆心到直线 $3x - 4y - 4 = 0$ 距离的最大值为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(9)要制作一个容积为 $216\pi(\text{cm}^3)$ 的圆柱形封闭容器,要使所用材料最省,则圆柱的高和底面半径应分别为

(A)6 cm,6 cm

(B) $6\sqrt[3]{2}$ cm, $3\sqrt[3]{2}$ cm

(C) $6\sqrt[3]{4}$ cm, $3\sqrt[3]{4}$ cm

(D)8 cm, $3\sqrt{3}$ cm

(10)设点 $P(x,y)$ 是曲线 $C:x^2+y^2=1+|xy|$ 上任意一点,则点 P 到原点距离的最大值、最小值分别为

(A)最大值 $\sqrt{2}$,最小值 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(B)最大值 $\sqrt{2}$,最小值 1

(C)最大值 2,最小值 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(D)最大值 2,最小值 1

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

(11)复数 $z=\frac{2}{1-i}$ 的共轭复数 $\bar{z}=\underline{\hspace{2cm}}$.

(12)若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 60° ,则该双曲线的离心率等于
 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13)已知函数 $f(x)=\begin{cases} \ln x, & 0<x\leq a \\ \frac{a}{x}, & x>a \end{cases}$,若函数 $f(x)$ 存在最大值,则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14)齐王与田忌赛马,田忌的上等马优于齐王的中等马,劣于齐王的上等马;田忌的中等马优于齐王的下等马,劣于齐王的中等马;田忌的下等马劣于齐王的下等马.现双方各出上、中、下等马各一匹,分 3 组各进行一场比赛,胜 2 场及以上者获胜.若双方均不知对方马的出场顺序,则田忌获胜的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$;若已知田忌的上等马与齐王的中等马分在一组,则田忌获胜的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(15)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n(S_n\neq 0)$, T_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积,满足

$S_n+T_n=S_n\cdot T_n(n\in\mathbf{N}^*)$,给出下列四个结论:

① $a_1=2$; ② $a_n=\frac{2}{n(2n-1)}$; ③ $\{T_n\}$ 为等差数列; ④ $S_n=\frac{n+1}{n}$.

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin 2\omega x + 2\cos^2 \omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π 。

(I) 求 ω 的值;

(II) 把 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),再把得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,得到函数 $y = g(x)$ 的图象,求函数 $g(x)$ 的单调递增区间。

(17)(本小题 14 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 2$, $AD = AP = 4$, M, N 分别是 BC, PD 的中点。

(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 PAB ;

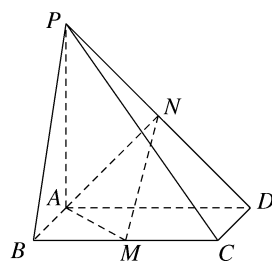
(II) 再从条件①,条件②两个中选择一个作为已知,

求平面 AMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值。

条件①: $AD \perp MN$;

条件②: $AM = AN$ 。

注:如果选择条件①和条件②分别解答,按第一个解答计分。



(18)(本小题 13 分)

为了解 A、B 两个购物平台买家的满意度,某研究性学习小组采用随机抽样的方法,获得 A 平台问卷 100 份, B 平台问卷 80 份。问卷中,对平台的满意度等级为:好评、中评、差评,对应分数分别为:5 分、3 分、1 分,数据统计如下:

	好评(5 分)	中评(3 分)	差评(1 分)
A 平台	75	20	5
B 平台	64	8	8

假设用频率估计概率,且买家对 A、B 平台的满意度评价相互独立。

(I) 估计买家对 A 平台的评价不是差评的概率;

(II) 从所有在 A 平台购物的买家中随机抽取 2 人,从所有在 B 平台购物的买家中随机抽取 2 人,估计这 4 人中恰有 2 人给出好评的概率;

(III) 根据上述数据,你若购物,选择 A、B 哪个平台? 说明理由。

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 且 $|AB| = 4$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 P 是椭圆 C 上不同于 A, B 的一点, 直线 PA, PB 与直线 $x = 4$ 分别交于点 M, N . 试判断以 MN 为直径的圆是否过定点, 若过定点, 求出定点坐标; 若不过定点, 请说明理由.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2x-a}{(x+1)^2}$.

(I) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 当函数 $f(x)$ 存在极小值时, 求证: 函数 $f(x)$ 的极小值一定小于 0.

(21)(本小题 15 分)

约数, 又称因数. 它的定义如下: 若整数 a 除以整数 $m (m \neq 0)$ 除得的商正好是整数而没有余数, 我们就称 a 为 m 的倍数, 称 m 为 a 的约数.

设正整数 a 共有 k 个正约数, 即为 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k (a_1 < a_2 < \dots < a_k)$.

(I) 当 $k = 4$ 时, 若正整数 a 的 k 个正约数构成等比数列, 请写出一个 a 的值;

(II) 当 $k \geq 4$ 时, 若 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}$ 构成等比数列, 求正整数 a ;

(III) 记 $A = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{k-1} a_k$, 求证: $A < a^2$.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯