

2021 北京大兴高一（上）期末

数 学

本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $\{0\}$ (B) $\{3\}$
(C) $\{1, 2\}$ (D) $\{0, 1, 2, 3\}$

(2) $\tan \frac{3\pi}{4}$ 等于

- (A) $-\sqrt{3}$ (B) -1
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1

(3) $8^{\frac{1}{3}} + \log_{\frac{1}{2}} 2$ 等于

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

(4) 下列函数中，值域为区间 $[2, +\infty)$ 的是

- (A) $f(x) = 2x^2$ (B) $f(x) = 2^x + 1$
(C) $f(x) = |x| + 2$ (D) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(5) 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 2x < 0$ ”的否定是

- (A) $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 2x \geq 0$ (B) $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 2x \geq 0$
(C) $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 2x > 0$ (D) $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 + 2x < 0$

(6) “ $x > 1$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 下列函数中，周期为 π 且为偶函数的是

(A) $f(x) = \tan 2x$

(B) $f(x) = \sin x \cos x$

(C) $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

(D) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(8) 方程 $e^x + 4x - 3 = 0$ 的解所在的区间是

(A) $(-\frac{1}{4}, 0)$

(B) $(0, \frac{1}{4})$

(C) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

(D) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

(9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax+5, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 则 a 的范围是

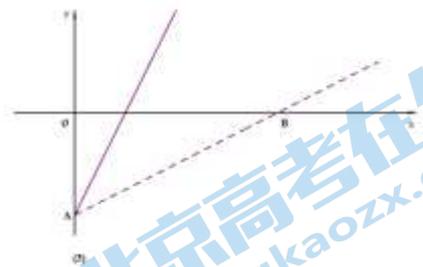
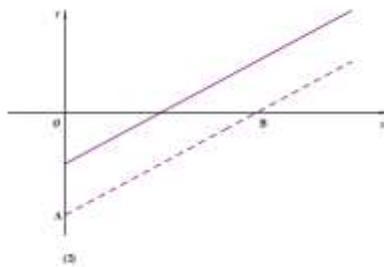
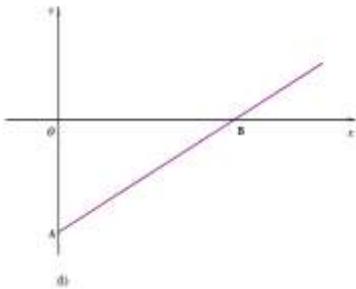
(A) $(-\infty, 0)$

(B) $[-4, +\infty)$

(C) $(-\infty, -4)$

(D) $[-4, 0)$

(10) 若某部影片的盈利额 y 等于影片的票房收入与投入成本之差, 记观影人数为 x , 其函数图象如图 (1) 所示. 由于受疫情影响, 该片盈利未达到预期, 相关人员提出了两种调整方案, 图 (2)、图 (3) 中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图象.



给出下列四种说法:

- ①图 (2) 对应的方案是: 提高票价, 并提高成本;
- ②图 (2) 对应的方案是: 保持票价不变, 并降低成本;
- ③图 (3) 对应的方案是: 提高票价, 并保持成本不变;
- ④图 (3) 对应的方案是: 提高票价, 并降低成本.

其中, 正确的说法是

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

(11) 函数 $f(x) = \lg(1-x)$ 的定义域为_____.

(12) 三个数 $1.1^{0.5}$, $0.9^{0.5}$, $0.9^{0.6}$ 按照由小到大的顺序排列是_____.

(13) 已知角 α 终边与单位圆的交点为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 则 $\cos \alpha =$ ___; $\sin(\alpha + \pi) =$ ___.

(14) 若二次函数 $y = f(x)$ 图像关于 $x = 2$ 对称, 且 $f(a) < f(0) < f(1)$, 则实数 a 的取值范围是

(15) 已知函数 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 且 $f(0) = 3$, $\frac{f(0.5)}{f(0)} = 2$, $\frac{f(1)}{f(0.5)} = 2$, ...,

$\frac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))} = 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $f(2) =$ ___; $f(x)$ 的一个解析式可以是___.

三、解答题: 本大题共 6 个小题, 共 85 分. 应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(16) (本小题共 14 分)

(I) 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\tan \alpha$ 的值;

(II) 若 $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin(x + \varphi)$, 求 φ 的一个值.

(17) (本小题共 14 分)

已知关于 x 的不等式 $x^2 - 2x - 1 > a$ ($a \in \mathbf{R}$)

(I) 若 $a = 1$, 求不等式的解集;

(II) 若不等式的解集为 \mathbf{R} , 求实数 a 的范围.

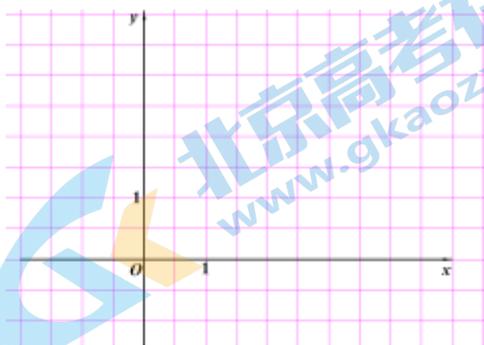
(18) (本小题共 14 分)

已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = x^a$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f(-1) = 2$.

(I) 求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式;

(II) 在同一坐标系中画出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象;

(III) 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 写出不等式 $h(x) > 0$ 的解集.



(19) (本小题共 14 分)

已知函数 $f(x) = 3\sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

(I) 用“五点法”画出函数 $y = f(x)$ 在一个周期内的简图;

(II) 说明函数 $y = f(x)$ 的图像可以通过 $y = \sin x$ 的图像经过怎样的变换得到?

(III) 若 $f(x_0) = \frac{3}{2}$, $x_0 \in [2\pi, 3\pi]$, 写出 x_0 的值.

(20) (本小题共 14 分)

已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的单调性, 并证明你的结论;

(II) 是否存在实数 a 使函数 $f(x)$ 为奇函数? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

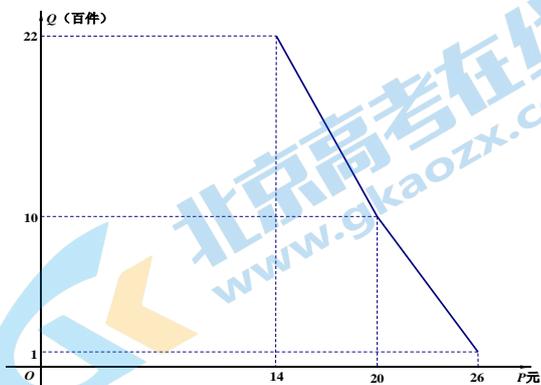
(21) (本小题共 15 分)

在对口扶贫活动中, 甲将自己经营某种消费品的一个小店以优惠价 2 万元转让给身体有残疾的乙经营, 并约定从该店经营的利润中, 首先保证乙的每月最低生活开支 3600 元后, 逐步偿还转让费 (不计息)。在甲提供的资料中, 有: ①这种消费品进价每件 14 元; ②该店月销量 Q (百件) 与销售价格 p (元) 的关系如图; ③每月需要各种开支 2000 元。

(I) 为使该店至少能够维持乙的生活, 商品价格应控制在什么范围内?

(II) 当商品价格每件多少元时, 月利润扣除最低生活费的余额最大, 并求最大余额。

(III) 若乙只依靠该店, 能否在 3 年内脱贫 (偿还完转让费)?



2021 北京大兴高一（上）期末数学

参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	B	C	B	A	D	C	D	C

二、填空题

(11) $(-\infty, 1)$

(12) $0.9^{0.6} < 0.9^{0.5} < 1.1^{0.5}$ (或 $0.9^{0.6}, 0.9^{0.5}, 1.1^{0.5}$)

(13) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3分); $-\frac{1}{2}$ (2分)

(14) $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ (只写对一部分给 3 分)

(15) $f(2) = 48$ (3分); $f(x) = 3 \times 4^x, x \in \mathbf{R}$ (2分)

三、解答题

(16)

解: (I) 由已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$,

又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

且 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,2分

所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$,4分

即 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,6分

所以 $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$8分

(II) 由于 $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin(x + \varphi)$, 则

$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin x \cos \varphi + 2 \cos x \sin \varphi$,2分

于是 $2 \sin \varphi = 1, 2 \cos \varphi = -\sqrt{3}$,

即 $\sin \varphi = \frac{1}{2}, \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,4分

所以 φ 的一个值是 $\frac{5\pi}{6}$. (答案不唯一)6分

(17) 解: (I) $a=1$ 时, 原不等式为 $x^2 - 2x - 1 > 1$,

整理, 得 $x^2 - 2x - 2 > 0$,2分

对于方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$,

因为 $\Delta = 12 > 0$,4分

所以它有两个不等的实数根,

解得 $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$,7分

结合函数 $y = x^2 - 2x - 2$ 的图像得不等式的解集为

$\{x | x < 1 - \sqrt{3}, \text{ 或 } x > 1 + \sqrt{3}\}$9分

(II) 原不等式可化为 $x^2 - 2x - 1 - a > 0$,1分

由于不等式解集为 \mathbf{R} ,

结合函数 $y = x^2 - 2x - 1 - a$ 图象可知,

方程 $x^2 - 2x - 1 - a = 0$ 无实数根,

所以 $\Delta = 4 + 4(1 + a) = 8 + 4a < 0$,3分

所以 a 的范围是 $\{a | a < -2\}$5分

(18)

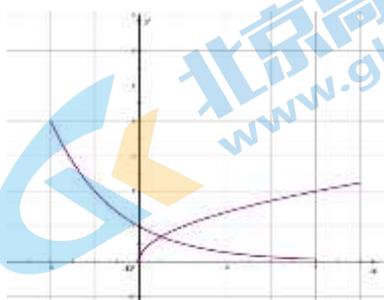
解: (I) 因为 $f(-1) = 2$, 即 $a^{-1} = 2$,2分

解得 $a = \frac{1}{2}$,4分

所以 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$,6分

$g(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$8分

(II) $y = f(x)$ 图象与 $y = g(x)$ 图象如图所示



.....4分

(III) $[0, \frac{1}{2})$2分

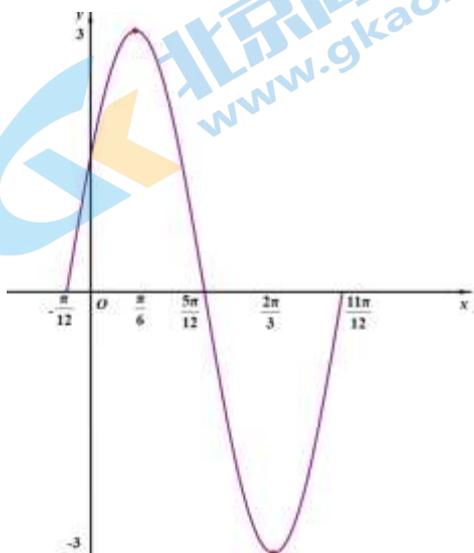
(19)

解: (I) 令 $X = 2x + \frac{\pi}{6}$, 则 $x = \frac{1}{2}(X - \frac{\pi}{6})$.

列表

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
y	0	3	0	-3	0

.....3分



.....5分

(II) 将 $y = \sin x$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 图象;2分

然后使图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 图象;4分

最后把图象上各点的纵坐标变为原来的 3 倍, 这时的图象就是函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象.6分

(说明: 先伸缩后平移比照给分)

(III) $x_0 = 2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi$ 3分

(20)

解: (I) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.1分

证明: 设对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则3分

$$f(x_1) - f(x_2) = a - \frac{2}{2^{x_1} + 1} - \left(a - \frac{2}{2^{x_2} + 1} \right) \quad \dots\dots 4 \text{分}$$

$$= \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1}$$

$$= \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)} \quad \dots\dots 6 \text{分}$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $2^{x_1} < 2^{x_2}$, 即 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$, $\dots\dots 7 \text{分}$

又 $2^{x_1} + 1 > 0, 2^{x_2} + 1 > 0$,

于是 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数. $\dots\dots 8 \text{分}$

(II) 由于函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $\dots\dots 1 \text{分}$

假设存在 a 使得函数 $f(x)$ 为奇函数,

那么, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, $\dots\dots 2 \text{分}$

即 $f(-x) + f(x) = 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$$\text{即 } a - \frac{2}{2^{-x} + 1} + a - \frac{2}{2^x + 1} = 0, \quad \dots\dots 3 \text{分}$$

化简得 $2a - 2 = 0$, 解得 $a = 1$, $\dots\dots 5 \text{分}$

经检验, $a = 1$ 时函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 为奇函数.

所以存在实数 $a = 1$ 使函数 $f(x)$ 为奇函数. $\dots\dots 6 \text{分}$

(21)

(I) 设该店月利润余额为 L (元), 则由题意, 得

$$L = Q(p - 14) \times 100 - 3600 - 2000, \quad \dots\dots 1 \text{分}$$

由销售图易得,

$$Q = \begin{cases} -2p + 50, & 14 \leq p \leq 20, \\ -\frac{3}{2}p + 40, & 20 < p \leq 26. \end{cases} \quad \dots\dots 3 \text{分}$$

所以

$$L = \begin{cases} (-2p + 50)(p - 14) \times 100 - 5600, & 14 \leq p \leq 20, \\ (-\frac{3}{2}p + 40)(p - 14) \times 100 - 5600, & 20 < p \leq 26. \end{cases} \quad \dots\dots 5 \text{分}$$

要能维持生活, 需 $L \geq 0$ $\dots\dots 6 \text{分}$

当 $14 \leq p \leq 20$ 时, 解得 $18 \leq p \leq 20$;7分

当 $20 < p \leq 26$ 时, 解得 $20 < p \leq 22$;8分

所以, 商品价格应控制在 $18 \leq p \leq 22$ 内.9分

(II) 当 $18 \leq p \leq 20$ 时, L 的最大值为 450 元, 这时 $p = 19.5$ 元;1分

当 $20 < p \leq 22$ 时, L 的最大值为 $\frac{1250}{3}$ 元, 这时 $p = \frac{61}{3}$ 元;2分

故当 $p = 19.5$ 元时, 月利润余额最大为 450 元.3分

(III) 设可在 n 年内脱贫, 依题意,

$12n \times 450 - 20000 \geq 0$,1分

解得 $n \geq 4$,2分

所以, 若乙仅依靠该店 3 年内不能脱贫.3分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯