

数 学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{x \in U \mid x^2 - 5x + p = 0\}$, 若 $C_U M = \{1, 4\}$, 则 p 的值为 ()

- (A) -4 (B) 4 (C) -6 (D) 6

2. 对于函数① $y = x^2$, ② $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, ③ $y = |x-1|$, ④ $y = 2^{x+1}$, 其中在区间 $(0, 1)$ 上单调递减的函数的序号是 ()

- (A) ③④ (B) ①② (C) ②③ (D) ①④

3. 九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏. 在某种玩法中, 用 a_n 表示解下 $n(n \leq 9, n \in \mathbb{N}^*)$ 个圆环所需的移动最少次数, $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} - 1, & n \text{ 偶} \\ 2a_{n-1} + 2, & n \text{ 奇} \end{cases}$, 则解下 4 个圆环所需的最少移动次数为 ()

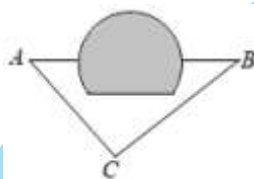
- (A) 7 (B) 10 (C) 12 (D) 22

4. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是单位向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$ 的最小值为 ()

- (A) -2 (B) $\sqrt{2} - 2$ (C) -1 (D) $1 - \sqrt{2}$

5. 如图所示, 为了测量某一隧道两侧 A、B 两地间的距离, 某同学首先选定了不在直线 AB 上的一点 C ($\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c), 然后确定测量方案并测出相关数据, 进行计算. 现给出如下四种测量方案: ①测量 $\angle A$, $\angle C$, b ; ②测量 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$; ③测量 a , b , $\angle C$; ④测量 $\angle A$, $\angle B$, a , 则一定能确定 A、B 间距离的所有方案的序号为 ()

- (A) ①③ (B) ①③④ (C) ②③④ (D) ①②④



6. 已知函数 $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = x^2 - x + 2$, 则 ()

(A) 曲线 $y=f(x)+g(x)$ 不是轴对称图形

(B) 曲线 $y=f(x)-g(x)$ 是中心对称图形

(C) 函数 $y=f(x)g(x)$ 是周期函数

(D) 函数 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 最大值为 $\frac{4}{7}$

7. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \theta)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象过点 $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 现将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $t(t>0)$ 个单位长度得到的函数图象也过点 P , 那么 ()

(A) $\theta = \frac{\pi}{3}$, t 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

(B) $\theta = \frac{\pi}{3}$, t 的最小值为 π

(C) $\theta = \frac{\pi}{6}$, t 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

(D) $\theta = \frac{\pi}{6}$, t 的最小值为 π

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n - a_{n-1} = n^2 + tn$, 则“ $t \geq 0$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的 ()

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2|x| - k$, 若存在实数 x_0 , 使得 $f(-x_0) = -f(x_0)$ 成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

(A) $[-1, +\infty)$

(B) $(-\infty, -1]$

(C) $[0, +\infty)$

(D) $(-\infty, 0]$

10. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对于定义域内任意 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为恒均变函数. 给出下列函数:

① $f(x) = 2x + 3$; ② $f(x) = x^2 - 2x + 3$; ③ $f(x) = e^x$; ④ $f(x) = \cos x$

其中为恒均变函数的序号是 ()

(A) ①③

(B) ①②

(C) ①②③

(D) ①②④

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 若复数 $z = \frac{2}{1+i}$, 则 $|z| =$ _____.

12. 在平面直角坐标系 XOY 中, 角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边交单位圆 O 于 $P(a, b)$, 且 $a+b = \frac{7}{5}$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ _____.

13. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，O，D分别为边AB，BC的中点，则① $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；②若

$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，则 $x+y = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

14. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ ， $g(x) = \ln x - ax - 1$ ，其中 $0 < a < 1$ ，e为自然对数的底数，若 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ ，使 $f(x_0)g(x_0) > 0$ ，则实数a的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

15. 设Q为平面直角坐标系xOy中的点集，从Q中的任意一点P作x轴、y轴的垂线，垂足分别为M,N,记点M的横坐标的最大值与最小值之差为 $x(Q)$,点N的纵坐标的最大值与最小值之差为 $y(Q)$.若Q是边长为1的正方形，给出下列三个结论：

① $x(Q)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

② $x(Q)+y(Q)$ 的取值范围是 $[2, 2\sqrt{2}]$

③ $x(Q)-y(Q)$ 恒等于0

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{1cm}}$

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. (本小题满分14分)

在 $\triangle ABC$ 中， $b\sin A = a\cos(B - \frac{\pi}{6})$ 。

(I) 求B；

(II) 若 $c=5$ ， $\underline{\hspace{1cm}}$ 。求a。

从① $b=7$ ，② $C=\frac{\pi}{4}$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

17. (本小题满分14分)

已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_3 + a_8 = 20$ ，且 a_5 是 a_2 与 a_{14} 的等比中项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前n项和 S_n 。

18. (本小题满分 14 分)

设常数 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$ 。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

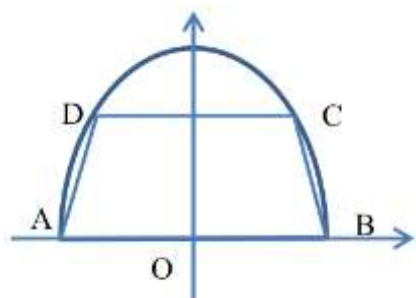
(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解。

19. (本小题满分 14 分)

如图, 点 D 是曲线 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (y \geq 0)$ 上的动点 (点 D 在 y 轴左侧), 以点 D 为顶点作等腰梯形 $ABCD$, 使点 C 在此曲线上, 点 A, B 在 x 轴上。设 $CD = 2x$, 等腰梯形 $ABCD$ 的面积为 $S(x)$ 。

(1) 写出函数 $S(x)$ 的解析式, 并求出函数的定义域;

(2) 当 x 为何值时, 等腰梯形 $ABCD$ 的面积最大? 求出最大面积。



20. (本题满分 15 分)

设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbb{R})$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2 , 记过点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 的直线的斜率为 k , 问: 是否存在 a , 使得 $k = 2 - a$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由

21. (本小题共 14 分)

数字 $1, 2, 3, \dots, n$, ($n \geq 2$) 的任意一个排列记作 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 设 S_n 为所有这样的排列构成的集合.

集合 $A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n \mid \text{任意整数 } i, j, 1 \leq i < j \leq n, \text{ 都有 } a_i - i \leq a_j - j\}$;

集合 $B_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n \mid \text{任意整数 } i, j, 1 \leq i < j \leq n, \text{ 都有 } a_i + i \leq a_j + j\}$;

(I) 用列举法表示集合 A_3, B_3 ;

(II) 求集合 $A_n \cap B_n$ 的元素个数;

(III) 记集合 B_n 的元素个数为 b_n , 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID: bj-gaokao）
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯](https://www.gaokzx.com) (ID: bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。