

# 房山区 2020 年第一次模拟检测

## 高三数学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

### 第一部分 (选择题 共 40 分)

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

(1) 复数  $i(3+i) =$

- (A)  $1+3i$  (B)  $-1+3i$   
(C)  $1-3i$  (D)  $-1-3i$

(2) 函数  $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{6})$  的最小正周期为

- (A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$   
(C)  $\pi$  (D)  $2\pi$

(3) 已知向量  $\mathbf{a} = (1, -\frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{b} = (-2, m)$ , 若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线, 则  $|\mathbf{b}| =$

- (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\sqrt{5}$   
(C)  $\sqrt{6}$  (D)  $2\sqrt{2}$

(4) 在二项式  $(1-2x)^5$  的展开式中,  $x^3$  的系数为

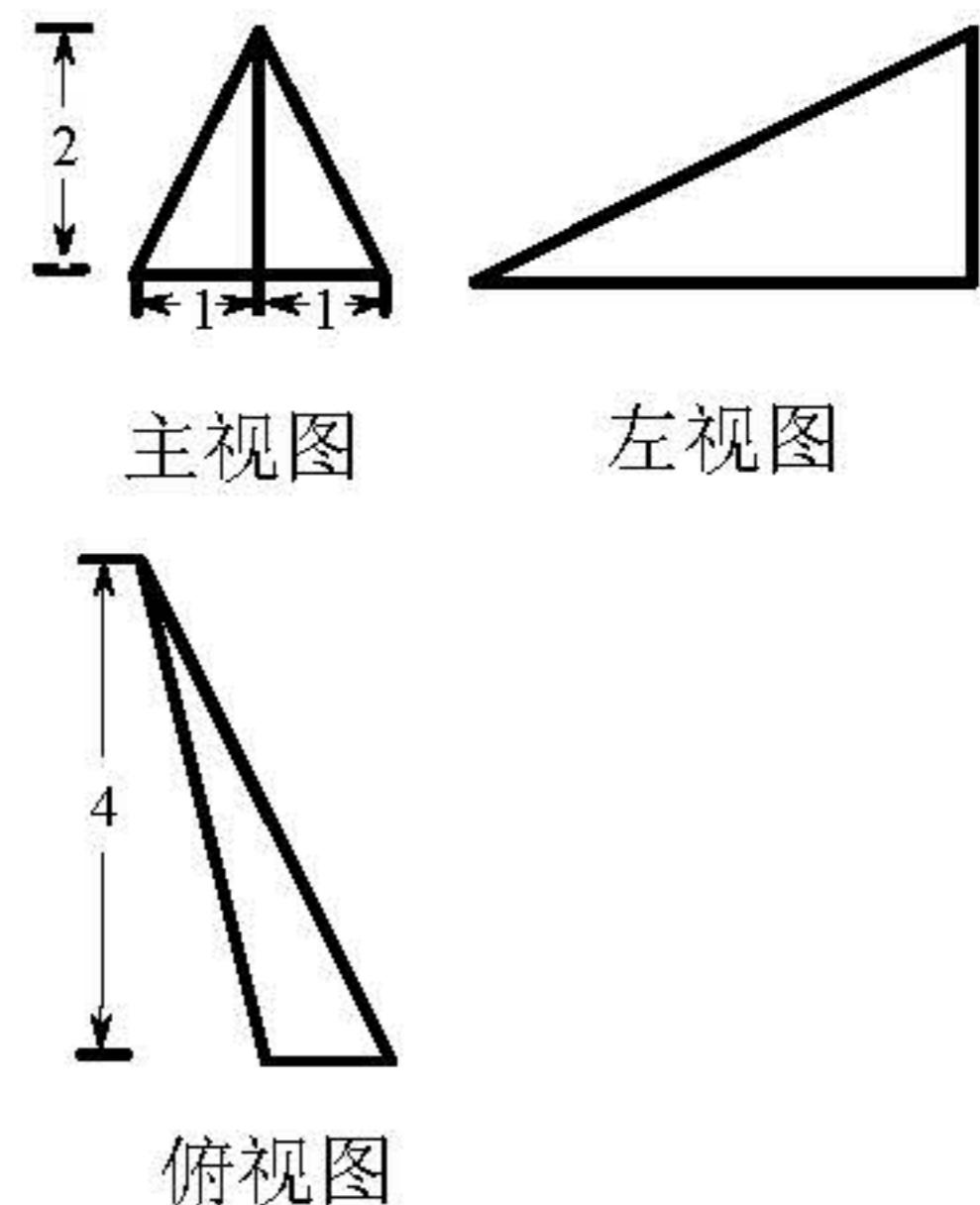
- (A) 40 (B) -40  
(C) 80 (D) -80

(5) 下列函数中, 既是偶函数又在  $(0, +\infty)$  上单调递减的是

- (A)  $y = x^{-2}$  (B)  $y = |\ln x|$   
(C)  $y = 2^{-x}$  (D)  $y = x \sin x$

(6) 某三棱锥的三视图如右图所示, 则该三棱锥的体积为

- (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{8}{3}$   
(C) 4 (D) 8



(7) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > -1, \\ bx + 1, & x \leq -1. \end{cases}$  若  $f(-2) = 0$ , 且  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是

(A)  $(0, 2]$

(B)  $(1, 2]$

(C)  $(1, +\infty)$

(D)  $[2, +\infty)$

(8) 设  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 则 “ $d < 0$ ” 是 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_{n+1} < S_n$ ” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知直线  $l$ :  $y = m(x-2) + 2$  与圆  $C$ :  $x^2 + y^2 = 9$  交于  $A$ ,  $B$  两点, 则使弦长  $|AB|$  为整数的直线  $l$  共有

(A) 6 条

(B) 7 条

(C) 8 条

(D) 9 条

(10) 党的十八大以来, 脱贫工作取得巨大成效, 全国农村贫困人口大幅减少. 下面的统计图反映了

2012-2019年我国农村贫困人口和农村贫困发生率的变化情况 (注: 贫困发生率 = 贫困人数 (人)  $\div$  统计人数 (人)  $\times 100\%$ ). 根据统计图提供的信息, 下列推断不正确的是



(A) 2012-2019年, 全国农村贫困人口逐年递减

(B) 2013-2019年, 全国农村贫困发生率较上年下降最多的是2013年

(C) 2012-2019年, 全国农村贫困人口数累计减少9348万

(D) 2019年, 全国各省份的农村贫困发生率都不可能超过0.6%

## 第二部分 (非选择题 共110分)

### 二、填空题共5小题, 每小题5分, 共25分。

(11) 已知集合  $A = \{1, 2, m\}$ ,  $B = \{1, 3, 4\}$ ,  $A \cap B = \{1, 3\}$ , 则  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(12) 设抛物线  $x^2 = 2py$  经过点  $(2, 1)$ , 则抛物线的焦点坐标为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等比数列,  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 100$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

设数列  $\{\lg a_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 则  $T_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 将函数  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  的图象向右平移  $s$  ( $s > 0$ ) 个单位长度, 所得图象经过点  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ , 则  $s$  的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(15) 如果方程  $\frac{x^2}{4} + y |y| = 1$  所对应的曲线与函数  $y = f(x)$  的图象完全重合, 那么对于函数  $y = f(x)$  有如下结论:

① 函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减;

②  $y = f(x)$  的图象上的点到坐标原点距离的最小值为 1;

③ 函数  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 2]$ ;

④ 函数  $F(x) = f(x) + x$  有且只有一个零点.

其中正确结论的序号是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分.

### 三、解答题共 6 题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(16) (本小题 14 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $a = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{10}$ ,  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (补充条件)

(I) 求  $\triangle ABC$  的面积;

(II) 求  $\sin(A+B)$ .

从①  $b = 4$ , ②  $\cos B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ , ③  $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$  这三个条件中任选一个, 补充在上面问题中并作答.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

(17) (本小题 14 分)

随着移动互联网的发展, 越来越多的人习惯用手机应用程序(简称 app)获取新闻资讯. 为了解用户对某款新闻类 app 的满意度, 随机调查了 300 名用户, 调研结果如下表: (单位: 人)

	青年人	中年人	老年人
满意	60	70	$x$
一般	55	25	$y$
不满意	25	5	10

(I) 从所有参与调研的人中随机选取 1 人, 估计此人“不满意”的概率;

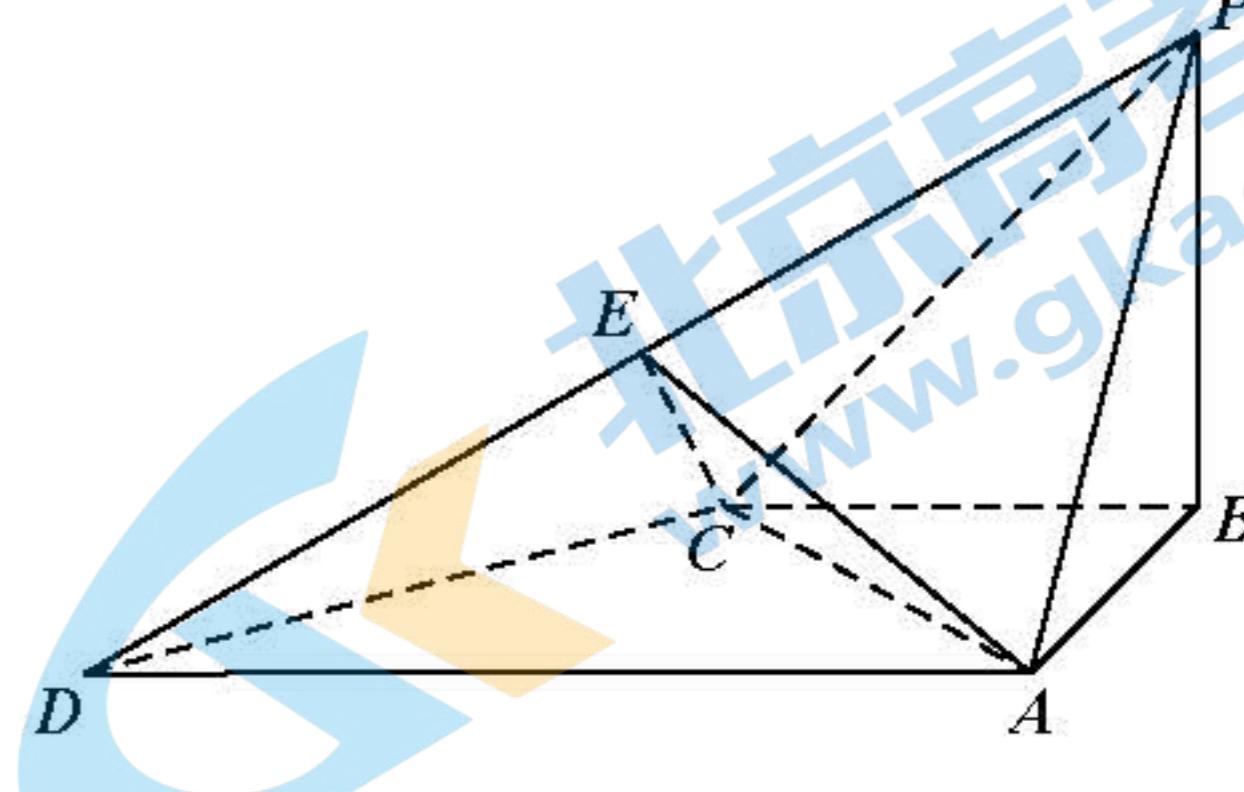
(II) 从参与调研的青年人和中年人中各随机选取 1 人, 估计恰有 1 人“满意”的概率;

(III) 现需从参与调研的老年人中选择 6 人作进一步访谈, 若在“满意”、“一般”、“不满意”的老年人中各取 2 人, 这种抽样是否合理? 说明理由.

(18) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = 2BC = 2$ ,  $AB = BC = PB$ , 点  $E$  为棱  $PD$  的中点.

- (I) 求证:  $CE \parallel$  平面  $PAB$ ;
- (II) 求证:  $AD \perp$  平面  $PAB$ ;
- (III) 求二面角  $E-AC-D$  的余弦值.



(19) (本小题 14 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 1)$  两点.

- (I) 求椭圆  $C$  的方程和离心率的大小;
- (II) 设  $M$ ,  $N$  是  $y$  轴上不同的两点, 若两点的纵坐标互为倒数, 直线  $AM$  与椭圆  $C$  的另一个交点为  $P$ , 直线  $AN$  与椭圆  $C$  的另一个交点为  $Q$ , 判断直线  $PQ$  与  $x$  轴的位置关系, 并证明你的结论.

(20) (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$ .

- (I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (II) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;
- (III) 若  $a > 0$ , 设函数  $g(x) = |f(x)|$ ,  $g(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值不小于 3, 求  $a$  的取值范围.

(21) (本小题 14 分)

在一个有穷数列的每相邻两项之间插入这两项的和, 形成新的数列, 我们把这样的操作称为该数列的一次“Z 拓展”. 如数列 1, 2 第 1 次“Z 拓展”后得到数列 1, 3, 2, 第 2 次“Z 拓展”后得到数列 1, 4, 3, 5, 2. 设数列  $a, b, c$  经过第  $n$  次“Z 拓展”后所得数列的项数记为  $P_n$ , 所有项的和记为  $S_n$ .

- (I) 求  $P_1$ ,  $P_2$ ;
- (II) 若  $P_n \geq 2020$ , 求  $n$  的最小值;
- (III) 是否存在实数  $a, b, c$ , 使得数列  $\{S_n\}$  为等比数列? 若存在, 求  $a, b, c$  满足的条件; 若不存在, 说明理由.

# 房山区 2020 年第一次模拟检测答案

## 高三数学

### 一、选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	B	D	A	A	B	D	C	D

### 二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分, 有两空的第一空 3 分, 第二空 2 分)

(11) 3

(12) (0,1)

(13)  $10^{n-1}$ ;  $\frac{n(n-1)}{2}$

(14)  $\frac{\pi}{12}$

(15) ②④ (注: 只写②或④得 3 分)

### 三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

(16) (本小题 14 分)

解:

选择①

(I) 在  $\triangle ABC$  中, 因为  $a = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{10}$ ,  $b = 4$ ,

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 4^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times \sqrt{2} \times 4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

(II) 在  $\triangle ABC$  中,  $A + B = \pi - C$ .

$$\text{所以 } \sin(A+B) = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

选择②

(I) 因为  $\cos B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\text{因为 } a = \sqrt{2}, \ c = \sqrt{10}, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2$$

(II) 因为  $a = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{10}$ ,  $\cos B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

由  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，得  $b^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times (-\frac{\sqrt{5}}{5}) = 16$ ，

解得  $b = 4$ ，

由  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，解得  $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

在  $\triangle ABC$  中， $A + B = \pi - C$ ， $\sin(A + B) = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

选择③

依题意， $A$  为锐角，由  $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$  得  $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

在  $\triangle ABC$  中，因为  $a = \sqrt{2}$ ， $c = \sqrt{10}$ ， $\cos A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，

由余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，得  $(\sqrt{2})^2 = b^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times \sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} b$

解得  $b = 2$  或  $b = 4$

(I) 当  $b = 2$  时， $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = 1$ 。

当  $b = 4$  时， $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = 2$ 。

(II) 由  $a = \sqrt{2}$ ， $c = \sqrt{10}$ ， $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ， $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，得  $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

在  $\triangle ABC$  中， $A + B = \pi - C$ ， $\sin(A + B) = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(17) (本小题 14 分)

解：

(I) 从所有参与调研的人共有 300 人，不满意的人数是  $25 + 5 + 10 = 40$

记事件  $D$  为“从所有参与调研的人中随机选取 1 人此人不满意”，则所求概率为

$$P(D) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}$$

(II) 记事件  $M$  为“从参与调研的青年人中随机选取 1 人，此人满意”，则  $P(M) = \frac{60}{140} = \frac{3}{7}$ ；

记事件  $N$  为“从参与调研的中年人中随机选取 1 人，此人满意”，则  $P(N) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ ；

则“从参与调研的青年人和中年人各随机选取 1 人，恰有 1 人满意”的概率为

$$P(M\overline{N} + \overline{M}N) = P(M) \cdot P(\overline{N}) + P(\overline{M}) \cdot P(N) = \frac{3}{7} \times (1 - \frac{7}{10}) + (1 - \frac{3}{7}) \times \frac{7}{10} = \frac{37}{70}$$

(III) 这种抽样不合理。

理由：参与调研的 60 名老年人中不满意的人数为 20，满意和一般的总人数为  $x + y = 50$ ，说明满意度之间存在较大差异，所以从三种态度的老年中各取 2 人不合理。合理的抽样方法是采用分层抽样，根据  $x, y, 10$  的具体数值来确定抽样数值。

(18) (本小题 14 分)

证明：

(I) 取  $PA$  中点  $F$ ，连接  $EF, BF$ ，因为  $E$  为  $PD$  中点， $F$  为  $PA$  中点，

所以  $EF \parallel AD$ ，且  $EF = \frac{1}{2}AD$

又因为  $BC \parallel AD$ ，且  $BC = \frac{1}{2}AD$

所以  $EF \parallel BC$ ，且  $EF = BC$

所以四边形  $BCEF$  为平行四边形，

所以  $CE \parallel BF$ ，

因为  $CE \not\subset$  平面  $PAB$ ,  $BF \subset$  平面  $PAB$

所以  $CE \parallel$  平面  $PAB$ .

(II) 因为  $PB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \subset$  平面  $ABCD$

所以  $PB \perp AD$

又因为  $AB \perp BC, AD \parallel BC$

所以  $AD \perp AB$ ，

又  $AB \cap PB = B$ ,  $AB, PB \subset$  平面  $PAB$

所以  $AD \perp$  平面  $PAB$ .

(III) 因为  $PB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB, BC \subset$  平面  $ABCD$

所以  $PB \perp AB, PB \perp BC$ ，又  $AB \perp BC$ ，

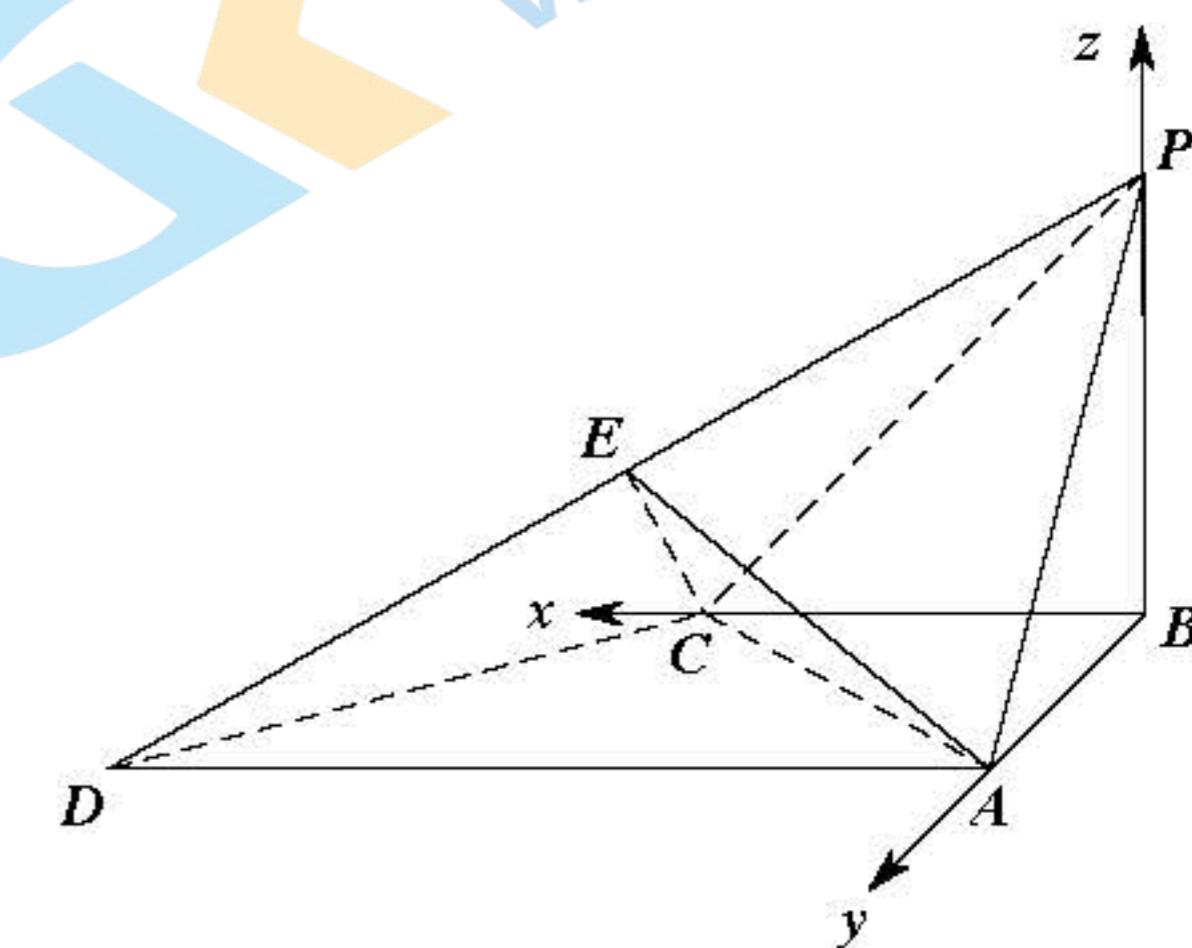
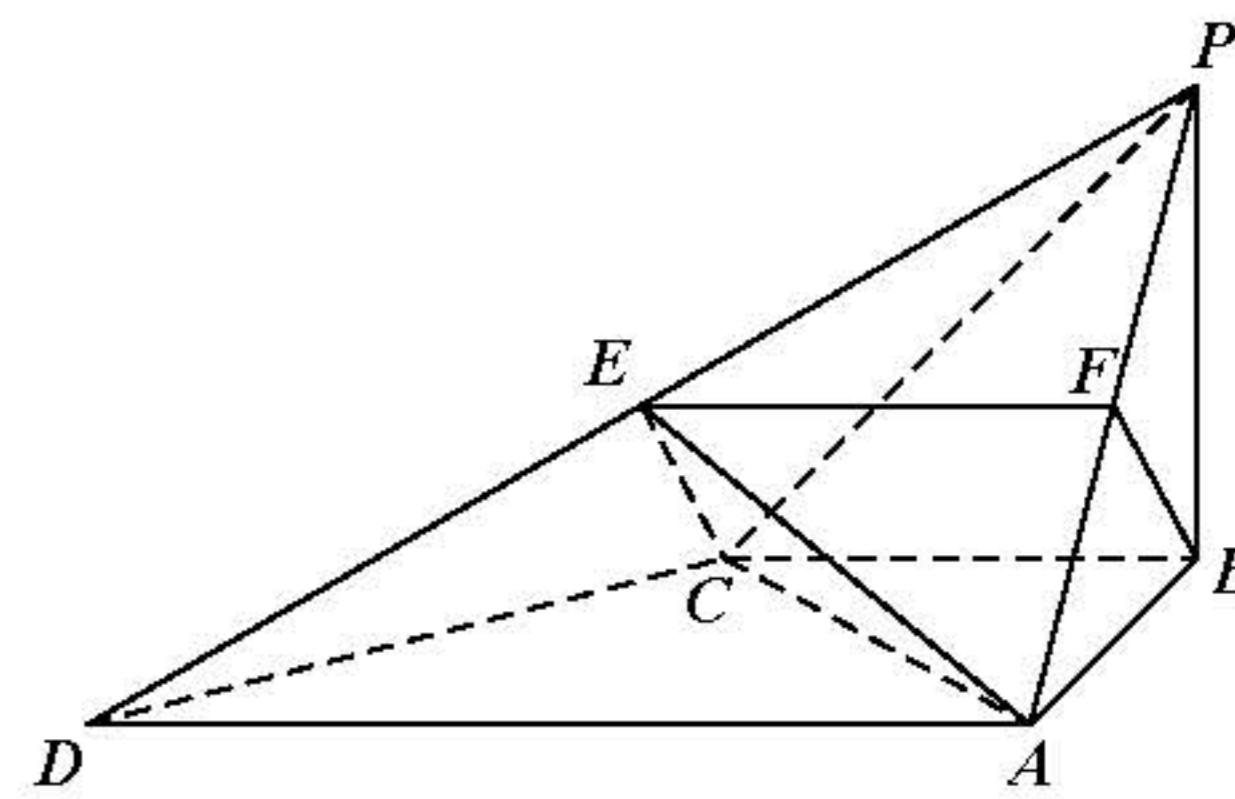
以  $B$  为原点，如图建立空间直角坐标系  $B-xyz$ ，

$B(0, 0, 0), P(0, 0, 1), A(0, 1, 0), C(1, 0, 0), E(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

所以  $\overrightarrow{BP} = (0, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (1, -1, 0), \overrightarrow{CE} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

已知平面  $ACD$  的一个法向量  $\overrightarrow{BP} = (0, 0, 1)$ ；

设平面  $ACE$  的法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases} \text{, 即} \begin{cases} x - y = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}, \text{令} x = 1, \text{则} y = 1, z = -1;$$

所以平面  $ACE$  的一个法向量为  $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$$\text{所以} \cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

由图可知二面角  $E - AC - D$  为锐角, 所以二面角  $E - AC - D$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

(19) (本小题 14 分)

解: (I) 依题意得  $a = 2$ ,  $b = 1$ , 所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}, \text{ 离心率的大小} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(II) 因为  $M$ ,  $N$  是  $y$  轴上不同的两点, 两点的纵坐标互为倒数,

设  $M$ ,  $N$  坐标为  $(0, m)$ ,  $(0, n)$ , 则  $n = \frac{1}{m}$ ,  $m \neq 0, n \neq 0$

由  $A(2, 0)$ ,  $M(0, m)$  得直线  $AM$  的方程为  $y = \frac{m}{-2}x + m$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = \frac{m}{-2}x + m \end{cases}$$

整理得  $(m^2 + 1)y^2 - 2my = 0$  或  $(m^2 + 1)x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 4 = 0$

得交点  $P$  的纵坐标为  $y_P = \frac{2m}{m^2 + 1}$

同理交点  $Q$  的纵坐标为  $y_Q = \frac{2n}{n^2 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{m}}{(\frac{1}{m})^2 + 1} = \frac{2m}{m^2 + 1}$

所以  $y_P = y_Q \neq 0$ , 直线  $PQ$  与  $x$  轴平行

解法二:

设直线  $AM$  的方程为  $x = ty + 2(t \neq 0)$ , 直线  $AN$  的方程为  $x = sy + 2(s \neq 0)$

令  $x=0$  得  $ty_M = -2$ ，  $M$  坐标为  $(0, \frac{-2}{t})$ ，同理  $N$  坐标为  $(0, \frac{-2}{s})$

因为  $M$ ， $N$  是  $y$  轴上不同的两点，两点的纵坐标互为倒数，所以  $st=4$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = ty + 2 \end{cases}$$

整理得  $(t^2 + 4)y^2 + 4ty = 0$  或  $(t^2 + 4)x^2 - 16x + 16 - 4t^2 = 0$

得交点  $P$  的纵坐标为  $y_P = \frac{-4t}{t^2 + 4}$

同理得  $y_Q = \frac{-4s}{s^2 + 4} = \frac{-4 \cdot \frac{4}{t}}{\left(\frac{4}{t}\right)^2 + 4} = \frac{-4t}{t^2 + 4}$

所以  $y_P = y_Q \neq 0$ ，直线  $PQ$  与  $x$  轴平行。

解法三：

设直线  $AM$  的方程为  $y = k_1(x-2)$ ， $k_1 \neq 0$ ，直线  $AN$  的方程为  $y = k_2(x-2)$ ， $k_2 \neq 0$

令  $x=0$  得  $M$  坐标为  $(0, -2k_1)$ ，同理  $N$  坐标为  $(0, -2k_2)$

因为  $M$ ， $N$  是  $y$  轴上不同的两点，两点的纵坐标互为倒数，所以  $4k_1k_2 = 1$

代入椭圆方程得  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = k_1(x-2) \end{cases}$

$(4k_1^2 + 1)x^2 - 16k_1^2x + 16k_1^2 - 4 = 0$  或  $(4k_1^2 + 1)y^2 + 4k_1y = 0$

$2x_P = \frac{16k_1^2 - 4}{4k_1^2 + 1}$  所以  $x_P = \frac{8k_1^2 - 2}{4k_1^2 + 1}$

得交点  $P$  的纵坐标为  $y_P = k_1 \cdot \left( \frac{8k_1^2 - 2}{4k_1^2 + 1} - 2 \right) = \frac{-4k_1}{4k_1^2 + 1}$

同理得  $y_Q = \frac{-4k_2}{4k_2^2 + 1} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{4k_1}}{4 \left( \frac{1}{4k_1} \right)^2 + 1} = \frac{-4k_1}{4k_1^2 + 1}$

所以  $y_P = y_Q \neq 0$ ，直线  $PQ$  与  $x$  轴平行。

(20) (本小题 15 分)

解: (I)  $f'(x) = 6x^2 - 2ax$

由  $f'(0) = 0$ ,  $f(0) = 2$ , 得

曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = 2$

(II) 定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 2x(3x - a)$

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{3}$

若  $a = 0$ ,  $f'(x) = 6x^2 \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增;

若  $a > 0$ , 在  $(-\infty, 0)$  上,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, 在  $(0, \frac{a}{3})$  上,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调

递减, 在  $(\frac{a}{3}, +\infty)$  上,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

若  $a < 0$ ,  $(-\infty, \frac{a}{3})$  上,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, 在  $(\frac{a}{3}, 0)$  上,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调

递减, 在  $(0, +\infty)$  上,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

(III) 若  $a > 0$ , 函数  $f(x)$  的单调减区间为  $(0, \frac{a}{3})$ , 单调递增区间为  $(-\infty, 0), (\frac{a}{3}, +\infty)$ .

当  $\frac{a}{3} \geq 1$  时, 即  $a \geq 3$ , 由 (II) 知,  $f(x)$  在  $[-1, 0]$  上单调递增, 在  $[0, 1]$  上单调递减,

则  $g(x)_{\max} = \max\{|f(-1)|, |f(0)|, |f(1)|\} = \max\{a, 2, |4-a|\} \geq 3$

当  $\frac{a}{3} < 1$  时, 即  $0 < a < 3$ ,  $f(x)$  在  $[-1, 0]$  和  $[\frac{a}{3}, 1]$  上单调递增, 在  $[0, \frac{a}{3}]$  上单调递减,

$f(x)$  在  $x = \frac{a}{3}$  处取得极小值  $f(\frac{a}{3}) = 2 - \frac{a^3}{27} > 0$

则  $g(x)_{\max} = \max\{|f(-1)|, |f(0)|, |f(1)|\} = \max\{a, 2, 4-a\}$ ,

若  $g(x)_{\max} \geq 3$ , 则  $4-a \geq 3$ , 即  $0 < a \leq 1$

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $(0, 1] \cup [3, +\infty)$

(21) (本小题 14 分)

解: (I) 因原数列有 3 项, 经第 1 次拓展后的项数  $P_1 = 3 + 2 = 5$ ;

经第 2 次拓展后的项数  $P_2 = 5 + 4 = 9$ .

(II) 因数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加一项,

由数列经第  $n$  次拓展后的项数为  $P_n$ , 则经第  $n+1$  次拓展后增加的项数为  $P_n - 1$ ,

所以  $P_{n+1} = P_n + (P_n - 1) = 2P_n - 1$

所以  $P_{n+1} - 1 = 2P_n - 2 = 2(P_n - 1)$ ,

由 (I) 知  $P_1 - 1 = 4$ ,  $P_n - 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

所以  $P_n = 2^{n+1} + 1$ ,

由  $P_n = 2^{n+1} + 1 \geq 2020$ , 即  $2^{n+1} \geq 2019$ , 解得  $n \geq 10$

所以  $n$  的最小值为 10.

(III) 设第  $n$  次拓展后数列的各项为  $a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, c$

所以  $S_n = a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m + c$

因数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加这两项的和,

所以  $S_{n+1} = a + (a + a_1) + a_1 + (a_1 + a_2) + a_2 + (a_2 + a_3) + \dots + a_m + (a_m + c) + c$

即  $S_{n+1} = 2a + 3a_1 + 3a_2 + \dots + 3a_m + 2c$

所以  $S_{n+1} = 3S_n - (a + c)$ ,  $S_{n+1} - \frac{a+c}{2} = 3(S_n - \frac{a+c}{2})$

得  $S_n - \frac{a+c}{2} = (S_1 - \frac{a+c}{2}) \cdot 3^{n-1}$

由  $S_1 = 2a + 3b + 2c$ , 则  $S_n = (b + \frac{a+c}{2}) \cdot 3^n + \frac{a+c}{2}$

若使  $S_n$  为等比数列, 则  $\begin{cases} \frac{a+c}{2} = 0 \\ b + \frac{a+c}{2} \neq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} b + \frac{a+c}{2} = 0 \\ \frac{a+c}{2} \neq 0 \end{cases}$

所以,  $a, b, c$  满足的条件为  $\begin{cases} a+c=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$  或者  $\begin{cases} 2b+a+c=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ .