

2022 北京丰台高一（下）期末

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 复数 $z = 1 - 2i$ 的虚部为()

- A. 1 B. i C. -2 D. $-2i$

2. 已知长方体的长、宽、高分别为 5, 4, 3, 那么该长方体的表面积为()

- A. 20 B. 47 C. 60 D. 94

3. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

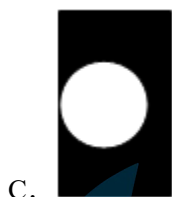
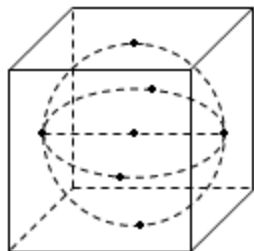
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{BC}| = a$, $|\overrightarrow{AC}| = b$, 将等式 $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$ 右边展开, 整理得 ()

- A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ B. $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$
C. $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$ D. $b^2 = a^2 + c^2 - 2acsinB$

5. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, k)$, 若存在实数 λ , 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, 则 k 和 λ 的值分别为()

- A. $-\frac{1}{2}$, -2 B. $\frac{1}{2}$, -2 C. $-\frac{1}{2}$, 2 D. $\frac{1}{2}$, 2

6. 如图所示, 该几何体是从一个水平放置的正方体中挖去一个内切球(正方体各个面均与球面有且只有一个公共点)以后而得到的, 现用一竖直的平面去截这个几何体, 则截面图形不可能是()

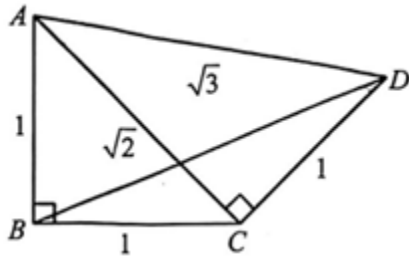


7. 已知直线 a, b 与平面 α, β, γ , 能使 $\alpha // \beta$ 成立的条件是()

- A. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ B. $a // \alpha, a // \beta$
C. $\alpha // \gamma, \beta // \gamma$ D. $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a // \beta, b // \beta$

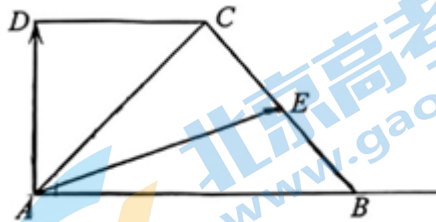
8. 古希腊的数学家特埃特图斯(Theaetetus, 约前417-前369)通过如图来构造无理数 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, 记

$\angle BAC = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, 则 $\cos(\alpha + \beta) =$ ()



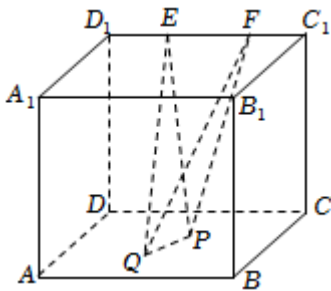
- A. $\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 如图, 在直角梯形ABCD中, $AB \parallel DC$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $AD = 2$, 若E为BC的中点, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} =$ ()



- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

10. 如图, 在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中、E、F是棱 C_1D_1 上任意两点、且 $EF=1$ 、P、Q是正方形ABCD及其内部的动点、且 $PQ=1$. 则四面体P-EFQ的体积的最大值为()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

二、填空题共5小题, 每小题5分, 共25分。

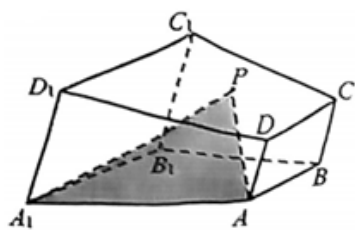
11. (5分) 若一个球的体积和表面积数值相等, 则该球的半径为 ____.

12. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=3$, $c=\sqrt{2}$, $B=\frac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ____.

13. (5分) 如果 $z=(1+ai)(1+i)(a \in \mathbb{R})$ 为纯虚数, 那么 $a=$ ____.

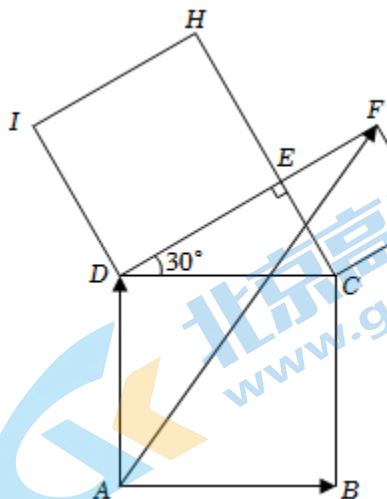
14. (5分) 木工小张在处理如图所示的一块四棱台形状的木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 时, 为了经过木料表面 CDD_1C_1 内一点P和棱 AA_1 将木料平整锯开, 需要在木料表面 CDD_1C_1 过点P画直线l, 则l满足 ____.(选出你认为正确的全部结论)

① $l \parallel AA_1$; ② $l \parallel BB_1$; ③l与直线 AA_1 相交; ④l与直线 BB_1 相交.



15. (5分) 根据毕达哥拉斯定理, 以直角三角形的三条边为边长作正方形, 从斜边上作出的正方形的面积正好等于在两直角边作出的正方形面积之和. 现在对直角三角形 CDE 按上述操作作图后, 得如下图所示的图形若

$\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 则 $x - y =$ ____.



三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sqrt{2}bc = b^2 + c^2 - a^2$.

(I) 求 A ;

(II) 若 $a = 2\sqrt{2}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 求 b .

17. (14分) 已知两个单位向量 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若向量 $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

(I) 求证: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

(II) 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

18. (14分) 在复平面内, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数分别为 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + ai (a \in \mathbb{R})$.

(I) 求 $|z_1 + z_2|$ 的最小值;

(II) 若 $\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2}$, 求实数 a 的值;

(III) 若复数 $\frac{z_2}{z_1}$ 对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

19. (14分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + m\cos x (m \in \mathbb{R})$.

(I) 若 $m = 1$, 求 $f(\frac{\pi}{12})$ 的值;

(II) 若 $m = \sqrt{6}$, 且 $f(x) = 0$, 求 $\tan 2x$.

20. (15分) 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AB = 2CD = 2$, 并将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 边旋转至 $ABEF$.

(I) 求证: 直线 $AB \perp$ 平面 ADF ;

(II) 求证: 直线 $CE \parallel$ 平面 ADF ;

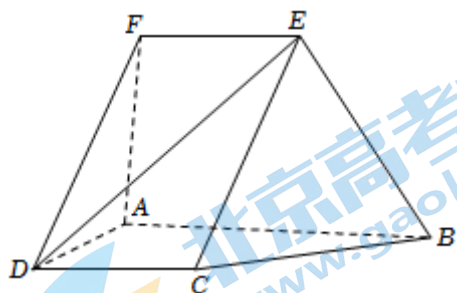
(III) 当平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ 时, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使平面 ADE 与平面 BCE 垂直. 并证明你的结论.

条件①: $AE = \sqrt{3}$;

条件②: $AD = 1$;

条件③: $BE \perp DE$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (III) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.



21. (14 分) 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 对任意两个向量 $\vec{m} = (x_1, y_1)$, $\vec{n} = (x_2, y_2)$, 作: $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{n}$. 当 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 不共线时, 记以 OM , ON 为邻边的平行四边形的面积为 $S(\vec{m}, \vec{n}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$; 当 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 共线时, 规定 $S(\vec{m}, \vec{n}) = 0$.

(I) 分别根据下列已知条件求 $S(\vec{m}, \vec{n})$:

① $\vec{m} = (2, 1)$, $\vec{n} = (-1, 2)$; ② $\vec{m} = (1, 2)$, $\vec{n} = (2, 4)$;

(II) 若向量 $\vec{p} = \lambda \vec{m} + \mu \vec{n} (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$,

求证: $S(\vec{p}, \vec{m}) + S(\vec{p}, \vec{n}) = (|\lambda| + |\mu|)S(\vec{m}, \vec{n})$;

(III) 若 A, B, C 是以 O 为圆心的单位圆上不同的点, 记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

(i) 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时, 求 $S(\vec{c}, \vec{a}) + S(\vec{c}, \vec{b})$ 的最大值;

(ii) 写出 $S(\vec{a}, \vec{a}) + S(\vec{b}, \vec{c}) + S(\vec{c}, \vec{a})$ 的最大值. (只需写出结果)

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】根据已知条件，结合虚部的定义，即可求解。

【解答】解： $z=1-2i$ 的虚部为 -2 。

故选：C。

【点评】本题主要考查虚部的定义，属于基础题。

2. 【分析】由长方体的长、宽、高分别为 5，4，3 直接写出表面积即可。

【解答】解： $\because$ 长方体的长、宽、高分别为 5，4，3，

$\therefore$ 长方体的表面积为 $2 \times (5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 5) = 94$ ；

故选：D。

【点评】本题考查了长方体的表面积公式的应用，属于基础题。

3. 【分析】由正弦的倍角公式变形即可解之。

【解答】解：因为 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ，

所以 $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ 。

故选：A。

【点评】本题考查正弦的倍角公式。

4. 【分析】将等式 $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$ 右边展开，则 $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2 |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos (\pi - B)$ ，化简即可得解。

【解答】解：在 $\triangle ABC$ 中，记 $|\overrightarrow{AB}| = c$ ， $|\overrightarrow{BC}| = a$ ， $|\overrightarrow{AC}| = b$ ，

将等式 $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$ 右边展开，

则 $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2 |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos (\pi - B)$ ，

即 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，

故选：B。

【点评】本题考查了平面向量数量积的运算，重点考查了向量的夹角，属基础题。

5. 【分析】根据 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 进行向量坐标的数乘运算可得出 $(2, 1) = (-\lambda, k\lambda)$ ，然后即可求出 k 和 λ 的值。

【解答】解： $\because \vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，

$\therefore (2, 1) = (-\lambda, k\lambda)$ ，

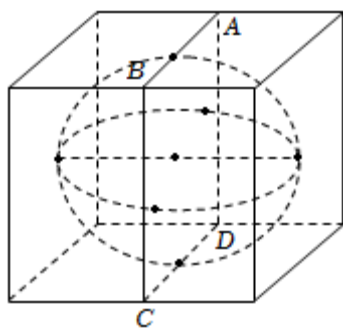
$\therefore \begin{cases} -\lambda = 2 \\ k\lambda = 1 \end{cases}$ ，解得 $\lambda = -2, k = -\frac{1}{2}$ 。

故选：A。

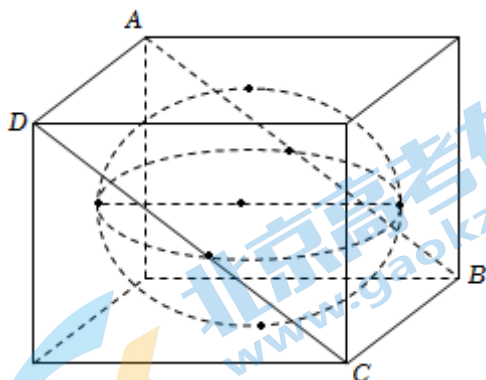
【点评】本题考查了向量坐标的数乘运算，相等向量的坐标关系，考查了计算能力，属于基础题。

6. 【分析】利用正方体内切球的性质，及球的截面圆即可求解。

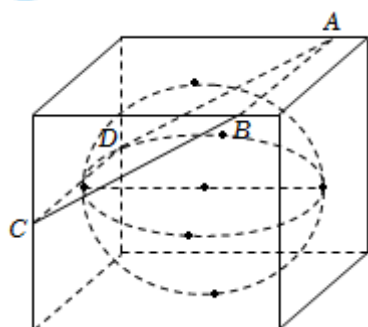
【解答】解：对于 A，用竖直的平面截正方体，该平面过球心，且过正方体四个面的中心，即可得到截面图形 A，如图：



对于 B ，用竖直的平面截正方体，该平面为正方体的对角面过球心，及正方体两个侧面的对角线的中心，即可得到截面图形 B ；



对于 CD ，用竖直的平面截正方体，该平面过正方体一个侧面的中心，如图，切点在截面 $ABCD$ 的边 CD 的中点处，且 CD 为长方形 $ABCD$ 中较短的线段，即可得到 D 。



故选：C。

【点评】本题考查正方体内切球的性质，及球的截面圆，属于基础题。

7. 【分析】由垂直于同一平面的两平面的位置关系判定 A ；由平行于同一直线的两平面的位置关系判定 B ；由平面与平面平行的性质及判定判断 C ；由平面与平面平行的判定定理判断 D 。

【解答】解：若 $\alpha \perp \gamma$ ， $\beta \perp \gamma$ ，可得 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交，故 A 错误；

若 $a \parallel \alpha$ ， $a \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交，故 B 错误；

若 $\alpha \parallel \gamma$ ， $\beta \parallel \gamma$ ，由平面与平面平行的性质及判定，可得 $\alpha \parallel \beta$ ，故 C 正确；

若 $a \subset \alpha$ ， $b \subset \alpha$ ， $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \beta$ ，且 a 与 b 相交，则 $\alpha \parallel \beta$ ，若 a 与 b 不相交，则不一定有 $\alpha \parallel \beta$ ，故 D 错误。

故选：C。

【点评】本题考查空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系的判定及应用，考查空间想象能力与思维能力，是基础题。

8. 【分析】由题意，利用直角三角形中的边角关系，两角和的余弦公式，计算 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值即可。

【解答】解：由题意，可得 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故 } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6},$$

故选：B.

【点评】本题主要考查了直角三角形中的边角关系，两角和的余弦公式的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

9. 【分析】由 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ，然后结合 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2$ 求解即可.

【解答】解：在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ， $AD = 2$ ，

由 E 为 BC 的中点，

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}^2 = 2,$$

故选：C.

【点评】本题考查了平面向量数量积的运算，属基础题.

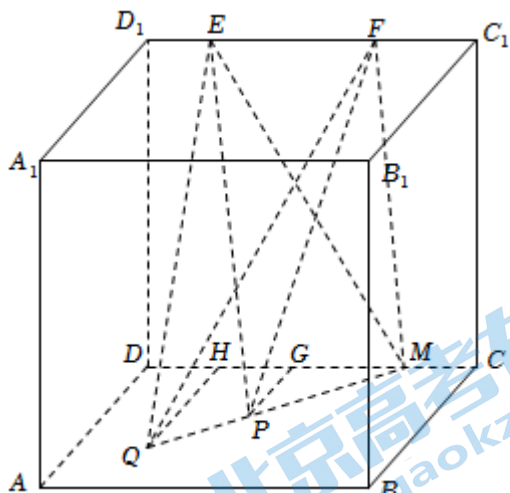
10. 【分析】设直线 QP 交直线 CD 于点 M ，连接 ME 、 MF ，设 $\angle QMH = \theta$ ，分析可得 $V_{PEFQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle MEF} \cdot PQ \sin \theta$ ，

即可求得结果.

【解答】解：设直线 QP 交直线 CD 于点 M ，连接 ME 、 MF ，

$$\text{则 } S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1,$$

过点 P 、 Q 在平面 $ABCD$ 内分别作 $PG \perp CD$ ， $QH \perp CD$ ，垂足分别为 G 、 H ，



因为平面 $ABCD \perp$ 平面 CC_1D_1D ，平面 $ABCD \cap$ 平面 $CC_1D_1D = CD$ ， $PG \perp CD$ ， $PG \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PG \perp$ 平面 CC_1D_1D ，同理可得 $QH \perp$ 平面 CC_1D_1D ，

$$\text{设 } \angle QMH = \theta, V_{PEFQ} = V_{Q-MEF} - V_{P-MEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle MEF} \cdot |QH - PG| = \frac{1}{3} S_{\triangle MEF} \cdot |QM - PM| \sin \theta = \frac{1}{3} S_{\triangle MEF} \cdot PQ \sin \theta \leq \frac{1}{3} S_{\triangle MEF} \cdot PQ = \frac{1}{3},$$

当且仅当 $PQ \perp CD$ 时，等号成立，

故四面体 $P-EFQ$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查了三棱锥体积的最值问题，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【分析】设出球的半径，求出球的体积和表面积，利用相等关系求出球的半径即可.

【解答】解：设球的半径为 r ，则球的体积为： $\frac{4\pi}{3}r^3$ ，球的表面积为： $4\pi r^2$ ，

因为球的体积与其表面积的数值相等，所以 $\frac{4\pi r^3}{3} = 4\pi r^2$ ，

解得 $r = 3$ ，

故答案为：3.

【点评】本题考查球的体积与表面积等基础知识，考查运算求解能力及方程思想，属于基础题.

12. 【分析】直接利用面积公式求解.

【解答】解：因为 $a = 3$ ， $c = \sqrt{2}$ ， $B = \frac{\pi}{4}$ ，

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$.

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查三角形的面积公式，属于基础题.

13. 【分析】根据已知条件，结合纯虚数的定义，即可求解.

【解答】解： $\because z = (1+ai)(1+i) = 1-a+(a+1)i$ 为纯虚数，

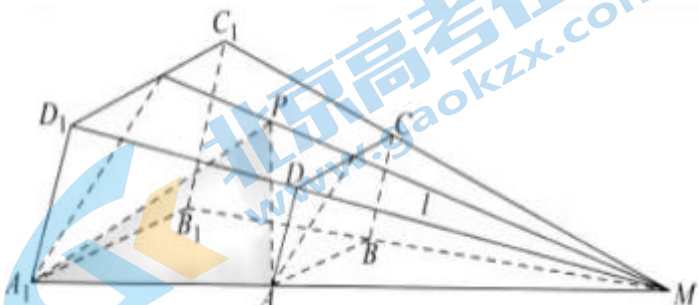
$\therefore \begin{cases} 1-a=0 \\ a+1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $a=1$.

故答案为：1.

【点评】本题主要考查纯虚数的定义，属于基础题.

14. 【分析】延长 A_1A ， B_1B 交于点 M ，则 C_1C ， D_1D 的延长线也过点 M ，则直线 PM 即为所求作的直线 l ，由此可得出结论.

【解答】解：延长 A_1A ， B_1B 交于点 M ，则 C_1C ， D_1D 的延长线也过点 M ，如下图所示：



因为 $M \in A_1A$ ，则 $M \in$ 平面 PA_1A ，则直线 PM 即为所求作的直线 l .

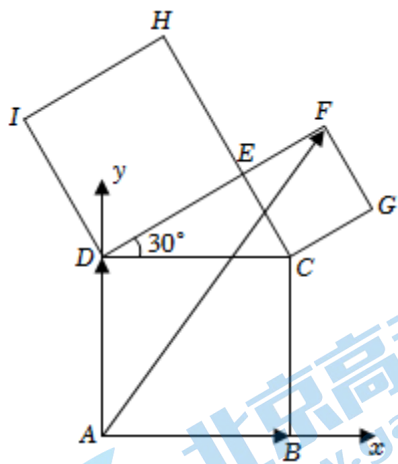
所以, 直线 l 与直线 A_1A 、直线 B_1B 都相交.

故答案为: ③④.

【点评】本题考查棱台的结构特征, 属于基础题.

15. 【分析】建立平面直角坐标系, 标出各个点的坐标, 利用平面向量的坐标运算即可得解.

【解答】解: 如图, 以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 为 x, y 轴建立平面直角坐标系,



设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$, 则正方形 $DEHI$ 的边长为 $\sqrt{3}a$, 正方形 $EFGC$ 边长为 a 可知

$A(0,0), B(2a,0), D(0,2a), DF = (\sqrt{3}+1)a$,

则 $x_F = (\sqrt{3}+1)a \cdot \cos 30^\circ, y_F = (\sqrt{3}+1)a \cdot \sin 30^\circ + 2a$, 即 $F(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a, \frac{5+\sqrt{3}}{2}a)$,

又 $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, $\therefore (\frac{3+\sqrt{3}}{2}a, \frac{5+\sqrt{3}}{2}a) = x(2a,0) + y(0,2a) = (2ax, 2ay)$,

$$\text{即 } \begin{cases} 2ax = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a \\ 2ay = \frac{5+\sqrt{3}}{2}a \end{cases}, \text{ 即 } 2ax - 2ay = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a - \frac{5+\sqrt{3}}{2}a,$$

化简得 $x - y = -\frac{1}{2}$,

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查平面向量的基本定理, 考查学生的运算能力, 属于中档题.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【分析】(I) 利用余弦定理, 即可解出角 A ;

(II) 利用正弦定理, 即可解出 b 值.

【解答】解: (I) 由余弦定理得, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore A \in (0, \pi)$,

$\therefore A = \frac{\pi}{4}$;

(II) 由正弦定理得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

$$\therefore b = 2\sqrt{3}.$$

【点评】本题考查了解三角形，学生的数学运算能力，属于基础题。

17. 【分析】(I) 由平面向量数量积运算，结合向量的模的运算求解即可；

$$(II) \text{ 由 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\vec{e}_1^2 - 5\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_2^2 = 2 - 5 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}, \text{ 结合 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{ 求解即可.}$$

【解答】证明：(I) 已知两个单位向量 $\vec{e}_1$ ， $\vec{e}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ，若向量 $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ， $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ，

$$\text{则 } \vec{a}^2 = \vec{e}_1^2 - 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 4\vec{e}_2^2 = 1 - 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 4 = 3, \quad \vec{b}^2 = 4\vec{e}_1^2 - 4\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2 = 3,$$

$$\text{即 } |\vec{b}| = |\vec{a}| = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } |\vec{a}| = |\vec{b}|;$$

$$(II) \text{ 解：由已知可得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\vec{e}_1^2 - 5\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_2^2 = 2 - 5 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2},$$

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \theta \in [0, \pi],$$

$$\text{则 } \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 的夹角为 } \frac{\pi}{3}.$$

【点评】本题考查了向量模的运算，重点考查了平面向量的夹角的运算，属基础题。

18. 【分析】(I) 利用复数的模长公式计算 $|z_1 + z_2|$ ，利用二次函数的性质求出最小值；

(II) 写出 $\overrightarrow{OZ_1}$ 、 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的坐标表示，利用 $\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2}$ 时 $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 0$ 列方程求出 a 的值；

(III) 化简 $\frac{z_2}{z_1}$ ，根据 $\frac{z_2}{z_1}$ 对应的点在第一象限列不等式组求出 a 的取值范围。

【解答】解：(I) 因为 $z_1 = 1 - 2i$ ， $z_2 = 3 + ai$ ，所以 $|z_1 + z_2| = |4 + (a - 2)i| = \sqrt{16 + (a - 2)^2} \geq 4$ ，

当 $a = 2$ 时， $|z_1 + z_2|$ 取得最小值为 4；

(II) 因为 $\overrightarrow{OZ_1} = (1, -2)$ ， $\overrightarrow{OZ_2} = (3, a)$ ，

若 $\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2}$ ，则 $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 3 - 2a = 0$ ，

$$\text{解得 } a = \frac{3}{2},$$

所以实数 a 的值为 $\frac{3}{2}$ ；

$$(III) \text{ 因为 } \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+ai}{1-2i} = \frac{(3+ai)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3-2a}{5} + \frac{a+6}{5}i,$$

因为 $\frac{z_2}{z_1}$ 对应的点在第一象限,

$$\text{所以 } \begin{cases} 3-2a > 0 \\ a+6 > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } -6 < a < \frac{3}{2},$$

所以实数 a 的取值范围是 $(-6, \frac{3}{2})$.

【点评】本题考查了复数的定义与运算问题,也考查了复数与向量的应用问题,是基础题.

19. 【分析】(I) 由题意,利用两角和差的三角公式化简函数 $f(x)$ 的解析式,从而得到 $f(\frac{\pi}{12})$ 的值.

(II) 先由题意求得 $\tan x$ 的值,再利用二倍角的正切公式,计算 $\tan 2x$ 的值.

【解答】解:(I) 若 $m=1$, 则函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$,

$$\therefore f(\frac{\pi}{12}) = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

$$(II) \because m = \sqrt{6}, f(x) = \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6}\cos x = 0,$$

$$\therefore \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{6}\cos x, \therefore \tan x = -\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 2\sqrt{2}.$$

【点评】本题主要考查两角和差的三角公式,二倍角的正切公式,属于基础题.

20. 【分析】(I) 依题意可得 $AB \perp AF$, 且 $AB \perp AD$, 由此证明直线 $AB \perp$ 平面 ADF ;

(II) 推导出 $DC \parallel EF$ 且 $DC = EF$, 从而得到 $CE \parallel DF$, 由此证明直线 $CE \parallel$ 平面 ADF ;

(III) 根据面面垂直的性质得到 $AD \perp$ 平面 $ABEF$, 从而得到 $AD \perp BE$, 再根据所选条件一一证明即可.

【解答】解:(I) 证明:在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$,

将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 边旋转到 $ABEF$, 则 $AB \perp AF$,

又 $AD \cap AF = A$, $AD, AF \subset$ 平面 ADF ,

$\therefore$ 直线 $AB \perp$ 平面 ADF ;

(II) 证明:依题意得 $DC \parallel EF$, 且 $DC = EF$,

$\therefore$ 四边形 $DCEF$ 为平行四边形,

$CE \parallel DF$, $DF \subset$ 平面 ADF , $CE \not\subset$ 平面 ADF ,

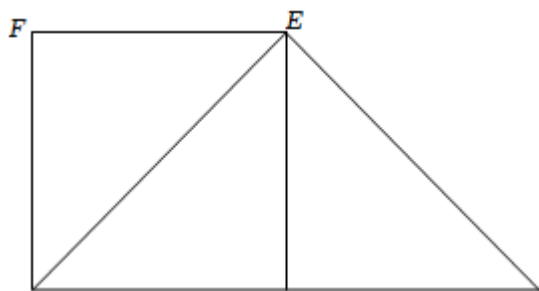
$\therefore$ 直线 $CE \parallel$ 平面 ADF ;

(III) 证明: $\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, $AB \perp AD$,

平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AD \perp$ 平面 $ABEF$, $BE \subset$ 平面 $ABEF$, $\therefore AD \perp BE$,

过点 E 作 $EM \perp AB$, 交 AB 于点 M ,



若选条件①: $AE = \sqrt{3}$, $EF = 1$, $\therefore AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{2}$,

$$\therefore BE = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{此时 } \cos \angle AEB = \frac{AE^2 + BE^2 - AB^2}{2AE \cdot BE} = \frac{3 + 3 - 2}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore 60^\circ < \angle AEB < 90^\circ,$$

如图, 过点 E 作 $EH \perp AE$, 交 AB 的延长线于点 H ,

$\because AD \perp$ 平面 $ABEF$, $EH \subset$ 平面 $ABEF$, $\therefore AD \perp EH$,

$\because AD \cap AE = A$, $AD, AE \subset$ 平面 ADE , $\therefore EH \perp$ 平面 ADE ,

$\because EH \subset$ 平面 HCE ,

$\therefore$ 平面 $HCE \perp$ 平面 ADE , 平面 BCE 与平面 ADE 不垂直,

若选条件②: $AD = 1$, 则 $AF = 1$,

$$\therefore AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{2}, \quad BE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

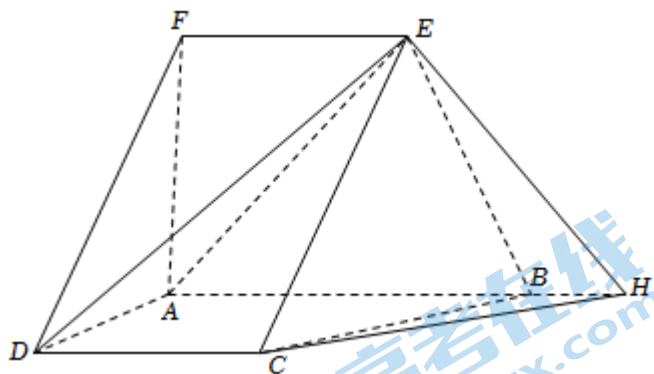
$$\therefore AE^2 + BE^2 = AB^2, \therefore AE \perp BE,$$

$\because AD \cap AE = A$, $AD, AE \subset$ 平面 ADE , $\therefore EB \perp$ 平面 ADE ,

$\because EB \subset$ 平面 BCE , $\therefore$ 平面 $BCE \perp$ 平面 ADE ;

若选条件③: $BE \perp DE$, 又 $AD \perp BE$, $AD \cap DE = D$,

$AD, AE \subset$ 平面 ADE , $\therefore EB \perp$ 平面 ADE ,



$\because EB \subset$ 平面 BCE ,

$\therefore$ 平面 $BCE \perp$ 平面 ADE .

【点评】本题考查线面垂直、线面平行、面面垂直的判定与性质等基础知识, 考查运算求解能力, 是中档题.

21. 【分析】(1) 由 $S(\vec{m}, \vec{n}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 求解;

(2) 由 $S(\vec{m}, \vec{n}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 证明;

(3) (i) 设 $\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \alpha$, 由 $S(\vec{c}, \vec{a}) + S(\vec{c}, \vec{b}) = \sin \alpha + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 求解;

$\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \alpha, \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = \beta, \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \gamma, S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\vec{b}, \vec{c}) + S(\vec{c}, \vec{a}) = \sin \gamma + \sin \beta + \sin \alpha$ 求解.

【解答】(1) 解: 因为 $\vec{m} = (2, 1), \vec{n} = (-1, 2)$,

且 $S(\vec{m}, \vec{n}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$,

所以 $S(\vec{m}, \vec{n}) = |2 \times 2 - 1 \times (-1)| = 5$;

又 $\vec{m} = (1, 2), \vec{n} = (2, 4)$,

是 $S(\vec{m}, \vec{n}) = |1 \times 4 - 2 \times 2| = 0$;

(2) 因为向量 $\vec{m} = (x_1, y_1), \vec{n} = (x_2, y_2)$,

且向量 $\vec{p} = \lambda \vec{m} + \mu \vec{n} (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$,

则 $\vec{p} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$,

所以 $S(\vec{p}, \vec{m}) = |(\lambda x_1 + \mu x_2)y_1 - (\lambda y_1 + \mu y_2)x_1| = |\mu| |x_1 y_2 - x_2 y_1|$,

同理 $S(\vec{p}, \vec{n}) = |\lambda| |x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

所以 $S(\vec{p}, \vec{m}) + S(\vec{p}, \vec{n}) = (|\lambda| + |\mu|) S(\vec{m}, \vec{n})$;

(3) (i) 设 $\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \alpha$, 因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

所以 $\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = \frac{3\pi}{2} - \alpha$,

所以 $S(\vec{c}, \vec{a}) + S(\vec{c}, \vec{b}) = \sin \alpha + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$,

$= \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$.

当 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时,

$S(\vec{c}, \vec{a}) + S(\vec{c}, \vec{b})$ 取得最大值 $\sqrt{2}$;

(ii) $S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\vec{b}, \vec{c}) + S(\vec{c}, \vec{a})$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【点评】本题考查向量的综合应用, 考查学生的运算能力, 属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通