

北京市西城区 2018 — 2019 学年度第一学期期末试卷

高三数学（文科）

2019.1

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 5\}$ ，那么 $A \cap B =$

(A) $\{0, 2, 4\}$

(B) $\{-2, 0, 2\}$

(C) $\{0, 2\}$

(D) $\{-2, 2\}$

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y = x^2 + 2x$

(B) $y = x^3$

(C) $y = \ln |x|$

(D) $y = \cos x$

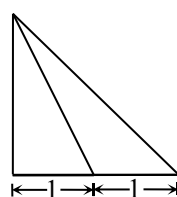
3. 一个四棱锥的三视图如图所示，那么这个四棱锥最长棱的棱长为

(A) $\sqrt{5}$

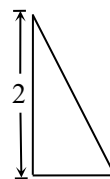
(B) $\sqrt{6}$

(C) $2\sqrt{2}$

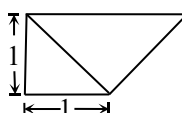
(D) $\sqrt{10}$



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

4. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0, \\ x - y - 3 \leq 0, \\ x + 2y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 3y$ 的最小值为

(A) -1

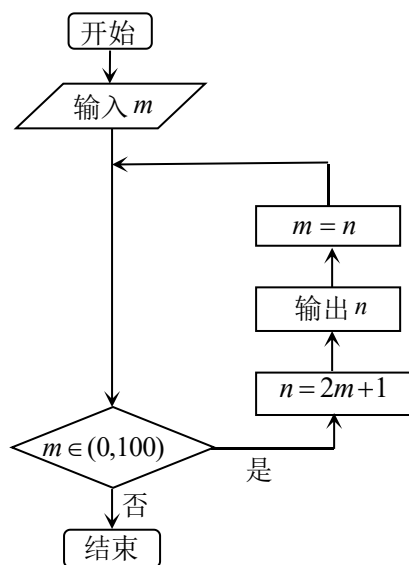
(B) -2

(C) 1

(D) 2

5. 执行如图所示的程序框图，若输入的 $m = 1$ ，则输出数据的总个数为

- (A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8



6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，“ $a_2 > a_1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件
(D) 既不充分也不必要条件

7. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是不共线的两个平面向量，已知 $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{QR} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ．若 P, Q, R 三点共线，则实数 k 的值为

- (A) 2
(B) -2
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $-\frac{1}{2}$

8. 设双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ．若在双曲线 C 上，有且只有 3 个不同的点 P 使得 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PA} = \lambda$ 成立，则 $\lambda =$

- (A) -2
(B) -1
(C) $\frac{1}{2}$
(D) 0

第Ⅱ卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 复数 z 满足方程 $1-i \cdot z=i$ ，则 $z=$ _____.

10. 以抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为圆心，且与直线 $y=x$ 相切的圆的方程为_____.

11. 能说明“设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，若 $f(0)=0$ ，则 $f(x)$ 是奇函数”为假命题的一个函数是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中， $a=3$ ， $b=2\sqrt{6}$ ， $B=2A$ ，则 $\cos A=$ _____.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ -x^2+x+\frac{1}{4}, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f[f(0)]=$ _____；若方程 $f(x)=b$ 有且仅有 3 个不同的实数根，则实数 b 的取值范围是_____.

14. 在某次国际交流活动中，组织者在某天上午安排了六场专家报告（时间如下，转场时间忽略不计），并要求听报告者不能迟到和早退.

报告名称	A	B	C	D	E	F
开始时间	8:00	8:10	8:45	8:40	9:15	9:25
结束时间	8:30	9:05	9:20	9:30	10:10	10:10

某单位派甲、乙两人参会，为了获得更多的信息，单位要求甲、乙两人所听报告不相同，且所听报告的总时间尽可能长，那么甲、乙两人应该舍去的报告名称为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\cos x \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(II) 若直线 $x = \pi$ 为函数 $f(x + a)$ 图象的一条对称轴，求实数 a 的值.

16. (本小题满分 13 分)

在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = \frac{1}{4}$ ，且 $a_4 + a_5 = 6a_3$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

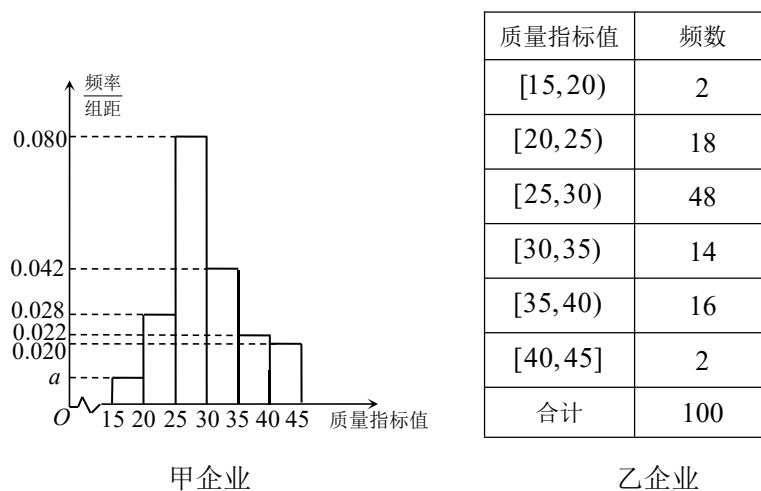
(II) 设数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n 的最小值.

17. (本小题满分 13 分)

为保障食品安全，某地食品药品监管部门对辖区内甲、乙两家食品企业进行检查，分别从这两家企业生产的某种同类产品中随机抽取了 100 件作为样本，并以样本的一项关键质量指标值为检测依据. 已知该质量指标值对应的产品等级如下：

质量指标值	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45]
等级	次品	二等品	一等品	二等品	三等品	次品

根据质量指标值的分组，统计得到了甲企业的样本频率分布直方图和乙企业的样本频数分布表（图表如下，其中 $a > 0$ ）.

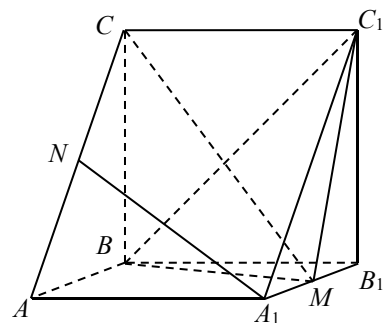


- (I) 现从甲企业生产的产品中任取一件，试估计该件产品为次品的概率；
- (II) 为守法经营、提高利润，乙企业开展次品生产原因调查活动. 已知乙企业从样本里的次品中随机抽取了两件进行分析，求这两件次品中恰有一件指标值属于 $[40,45]$ 的产品的概率；
- (III) 根据图表数据，请自定标准，对甲、乙两企业食品质量的优劣情况进行比较.

18. (本小题满分 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 B_1BCC_1 是正方形， M ， N 分别是 A_1B_1 ， AC 的中点， $AB \perp$ 平面 BCM .

- (I) 求证：平面 $B_1BCC_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 ；
- (II) 求证： $A_1N \parallel$ 平面 BCM ；
- (III) 若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 10，求棱锥 C_1-BB_1M 的体积.



19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1 (a > \sqrt{2})$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B , 点 M 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点, 直线 AM 与 y 轴交于点 P .

(I) 若点 P 在椭圆 C 的内部, 求直线 AM 的斜率的取值范围;

(II) 设椭圆 C 的右焦点为 F , 点 Q 在 y 轴上, 且 $\angle PFQ = 90^\circ$, 求证: $AQ \parallel BM$.

20. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x + a$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 如果曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴相切, 求 a 的值;

(II) 若 $a = \ln 2e$, 证明: $f(x) \leq x$;

(III) 如果函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1, e)$ 上不是单调函数, 求 a 的取值范围.

北京市西城区 2018 — 2019 学年度第一学期期末

高三数学（文科）参考答案及评分标准

2019.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. B | 2. C | 3. C | 4. A |
| 5. B | 6. B | 7. D | 8. D |

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

- | | | |
|--------------------------|---|--------------------------|
| 9. $-1-i$ | 10. $(x-2)^2 + y^2 = 2$ | 11. 答案不唯一，如 $f(x) = x^2$ |
| 12. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 13. $\frac{1}{4}; (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ | 14. D |

注：第 13 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 因为 $f(x) = 2\cos x(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2 分

$$= \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$$
 4 分

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{3}),$$
 6 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$ 7 分

(II) 由 (I), 知 $f(x+a) = \sin(2x+2a+\frac{\pi}{3})$,

因为直线 $x = \pi$ 为函数 $f(x+a)$ 图象的一条对称轴,

所以 $f(\pi+a)$ 为函数 $f(x+a)$ 的最大值或最小值,

$$\text{即 } f(\pi+a) = \sin(2\pi+2a+\frac{\pi}{3}) = \sin(2a+\frac{\pi}{3}) = \pm 1, \quad \text{..... 10 分}$$

$$\text{所以 } 2a + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得 } a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{..... 13 分}$$

16. (本小题满分 13 分)

解: (I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由 } a_4 + a_5 = 6a_3, \text{ 得 } a_1q^3 + a_1q^4 = 6a_1q^2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a_1 \neq 0, q \neq 0, \text{ 所以 } q^2 + q - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } q = -3 \text{ (舍)}, \text{ 或 } q = 2, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a_2 = a_1q = \frac{1}{4}, \text{ 得 } a_1 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{所以 } a_n = a_1q^{n-1} = 2^{n-4}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 设 } b_n = \log_2 a_n, \text{ 则 } b_n = \log_2 2^{n-4} = n - 4. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \{b_n\} \text{ 是首项为 } -3, \text{ 公差为 } 1 \text{ 的等差数列.} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{故当 } n < 4 \text{ 时, } b_n < 0; \text{ 当 } n = 4 \text{ 时, } b_n = 0; \text{ 当 } n > 4 \text{ 时, } b_n > 0. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } n = 3 \text{ 或 } 4 \text{ 时, } S_n \text{ 取到最小值 } S_3 = S_4 = -6. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由 $(a + 0.020 + 0.022 + 0.028 + 0.042 + 0.080) \times 5 = 1$, 得 $a = 0.008$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{所以甲企业的样本中次品的频率为 } (a + 0.020) \times 5 = 0.14,$$

$$\text{故从甲企业生产的产品中任取一件, 该产品是次品的概率约为 } 0.14. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 记“从乙企业样本里的次品中任取两件产品, 恰有一件产品是指标值属于 $[40, 45]$ 的产品”为事件 M , $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

记质量指标值在 $[15, 20]$ 内的 2 件产品样本分别为 A_1, A_2 , 质量指标值在 $[40, 45]$ 内的 2 件产品样本分别为 B_1, B_2 ,

则从乙企业样本里的次品中任取两件产品, 所有可能结果有 6 种, 即 (A_1, A_2) , (A_1, B_1) , (A_1, B_2) , (A_2, B_1) , (A_2, B_2) , (B_1, B_2) ,

而事件 M 的结果有 4 种, 它们是 (A_1, B_1) , (A_1, B_2) , (A_2, B_1) , (A_2, B_2) , $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{所以 } P(M) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

即从乙企业样本里的次品中任取两件产品，恰有一件产品指标值属于 $[40,45]$ 的产品的概率为 $\frac{2}{3}$ 10 分

(III) 答案不唯一，只要言之有理便可得分（下面给出几种参考方案）.

(1) 以产品的合格率（非次品的占有率）为标准，对甲、乙两家企业的食品质量进行比较.

由图表可知：甲企业产品的合格率约为0.86，乙企业产品的合格率约为0.96，即乙企业产品的合格率高于甲企业产品的合格率，

所以可以认为乙企业的食品生产质量更高.

(2) 以产品次品率为标准对甲、乙两家企业的食品质量进行比较（略）.

(3) 以产品中一等品的概率为标准，对甲乙两家企业的食品质量进行比较.

根据图表可知，甲企业产品中一等品的概率约为0.4；乙企业产品中一等品的概率约为0.48，即乙企业产品中一等品的概率高于甲企业产品中一等品的概率，

所以乙企业的食品生产质量更高. 13 分

18. (本小题满分 14 分)

解：(I) 因为 $AB \perp$ 平面 BCM ， $BC \subset$ 平面 BCM ，

所以 $AB \perp BC$ 2 分

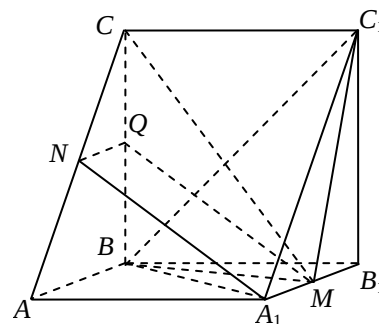
由正方形 B_1BCC_1 ，知 $BB_1 \perp BC$ ，

又因为 $AB \cap BB_1 = B$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 A_1ABB_1 4 分

又因为 $BC \subset$ 平面 B_1BCC_1 ，

所以平面 $B_1BCC_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 5 分



(II) 设 BC 中点 Q ，连结 NQ ， MQ 6 分

由 M ， N 分别为 A_1B_1 ， AC 的中点，得 $NQ \parallel AB$ ，且 $NQ = \frac{1}{2}AB$.

又因为 $AB \parallel A_1B_1$ ，且 $AB = A_1B_1$ ，

所以 $NQ \parallel A_1M$ ，且 $NQ = A_1M$ ，

故四边形 A_1MQN 为平行四边形,

所以 $A_1N \parallel MQ$ 8 分

又因为 $MQ \subset$ 平面 BCM , $A_1N \not\subset$ 平面 BCM ,

所以 $A_1N \parallel$ 平面 BCM 10 分

(III) 连结 A_1B . 根据棱柱和棱锥的体积公式,

得三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 的体积 $V_{B-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}V_{A_1B_1C_1-ABC} = \frac{10}{3}$ 12 分

又因为 M 为 A_1B_1 的中点,

所以棱锥 C_1-BB_1M 的体积 $V_{C_1-BB_1M} = V_{B-B_1C_1M} = \frac{1}{2}V_{B-A_1B_1C_1} = \frac{5}{3}$ 14 分

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意, 得 $c^2 = a^2 - 2$, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 2 分

解得 $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 3 分

设 $P(0, m)$, 由点 P 在椭圆 C 的内部, 得 $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$,

又因为 $A(-2, 0)$,

所以直线 AM 的斜率 $k_{AM} = \frac{m-0}{0+2} = \frac{m}{2} \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 5 分

又因为 M 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点,

所以 $k_{AM} \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 6 分

(II) 由题意 $F(\sqrt{2}, 0)$, 设 $Q(0, y_1)$, $M(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 \neq \pm 2$,

则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$.

直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$ 7 分

令 $x = 0$, 得点 P 的坐标为 $(0, \frac{2y_0}{x_0+2})$ 8 分

由 $\angle PFQ = 90^\circ$, 得 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$,

所以 $(-\sqrt{2}, \frac{2y_0}{x_0+2}) \cdot (-\sqrt{2}, y_1) = 0$, 9 分

即 $2 + \frac{2y_0}{x_0+2} \times y_1 = 0$, 解得 $y_1 = -\frac{x_0+2}{y_0}$, 所以 $Q(0, -\frac{x_0+2}{y_0})$ 10 分

因为 $k_{BM} = \frac{y_0}{x_0-2}$, $k_{AQ} = -\frac{x_0+2}{2y_0}$, 12 分

所以 $k_{BM} - k_{AQ} = \frac{y_0}{x_0-2} + \frac{x_0+2}{2y_0} = \frac{2y_0^2 + x_0^2 - 4}{2(x_0-2)y_0} = 0$,

故 $k_{BM} = k_{AQ}$, 即 $AQ \parallel BM$ 14 分

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) 求导, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 1 分

因为曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴相切, 所以此切线的斜率为 0, 2 分

由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$,

又由曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴相切, 得 $f(1) = -1 + a = 0$,

解得 $a = 1$ 3 分

(II) 由题意, $f(x) = \ln x - x + \ln 2e$,

令函数 $F(x) = f(x) - x = \ln x - 2x + \ln 2e$, 4 分

求导, 得 $F'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$,

由 $F'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$,

当 x 变化时, $F'(x)$ 与 $F(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $F(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 6 分

故当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $F(x)_{\max} = F(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} - 1 + \ln 2e = 0$,

所以任给 $x \in (0, +\infty)$, $F(x) = f(x) - x \leq 0$, 即 $f(x) \leq x$ 7 分

(III) 由题意, 得 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\ln x - x + a}{x^2}$,

求导, 得 $g'(x) = \frac{x - 2\ln x + 1 - 2a}{x^3}$,

因为 $x \in (1, e)$, 所以 $g'(x)$ 与 $h(x) = x - 2\ln x + 1 - 2a$ 的正负号相同. 8 分

对 $h(x)$ 求导, 得 $h'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$,

由 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 2$.

当 x 变化时, $h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(1, 2)$	2	$(2, e)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, e)$ 上单调递增.

又因为 $h(1) = 2 - 2a$, $h(e) = e - 1 - 2a$,

所以 $h(x)_{\min} = h(2) = 3 - 2\ln 2 - 2a$; $h(x)_{\max} = h(1) = 2 - 2a$ 10 分

如果函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递增, 则当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) \geq 0$.

所以 $h(x) \geq 0$ 在区间 $(1, e)$ 上恒成立, 即 $h(x)_{\min} = h(2) = 3 - 2\ln 2 - 2a \geq 0$,

解得 $a \leq \frac{3}{2} - \ln 2$, 且当 $a = \frac{3}{2} - \ln 2$ 时, $g'(x) = 0$ 的解有有限个,

即当函数 $g(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递增时, $a \leq \frac{3}{2} - \ln 2$; ① 11 分

如果函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递减, 则当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) \leq 0$,

所以 $h(x) \leq 0$ 在区间 $(1, e)$ 上恒成立, 即 $h(x)_{\max} = h(1) = 2 - 2a \leq 0$,

解得 $a \geq 1$, 且当 $a = 1$ 时, $g'(x) = 0$ 的解有有限个,

所以当函数 $g(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递减时, $a \geq 1$. ② 12 分

因为函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1, e)$ 上不是单调函数,

结合 ① ②, 可得 $\frac{3}{2} - \ln 2 < a < 1$,

所以实数 a 的取值范围是 $\frac{3}{2} - \ln 2 < a < 1$ 13 分