

2023 北京理工大附中高二（下）期中

数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- 复数 $\frac{1+i}{i}$ 的模为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
- 若曲线 $y=x^2$ 的一条切线的斜率为 4，则切点的横坐标为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
- 直线 $ax - y + 2a = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 的位置关系为 ()
A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定
- 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1$ ($n \geq 2$)，且 $S_2 = 3$ ，则 $a_1 + a_3 =$ ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 a_5 = a_3$ ，则 $a_3 =$ ()
A. 1 B. -1 C. 0 或 1 D. -1 或 1
- 对于函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 的描述，下列说法正确的是 ()
A. 函数 $f(x)$ 存在唯一的零点
B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增
C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增
D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$
- 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 “ $a_1 > a_2 > a_3$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 是递减数列” 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ ，则函数 $f(x)$ 的极值点的个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_{n-1} + a_{n+1} > 2a_n$ ($n > 1, n \in \mathbf{N}^*$)，给出下述命题：
①若数列 $\{a_n\}$ 满足， $a_2 > a_1$ ，则 $a_n > a_{n-1}$ ($n > 1, n \in \mathbf{N}^*$) 成立；
②存在常数 c ，使得 $a_n > c$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 成立；
③若 $p+q > m+n$ (其中 $p, q, m, n \in \mathbf{N}^*$)，则 $a_p + a_q > a_m + a_n$ ；

④存在常数 d , 使得 $a_n > a_1 + (n-1)d (n \in \mathbb{N}^*)$ 都成立.

其中所有正确命题的序号是 ()

A. ①②

B. ①③

C. ①④

D. ①

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. (5 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1=1$, $a_4=\frac{1}{8}$, 那么 $\{a_n\}$ 的公比为 _____, 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 5 项和为 _____.

12. (5 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 $a_3+a_9=a_{10}-a_8$. 若 $a_n=0$, 则 $n=$ _____.

13. (5 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x$, 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____; 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在单调递增区间, 则实数 a 的取值范围是 _____.

14. (5 分) 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若仅当 $n=5$ 时, S_n 取到最小值, 且 $|a_5| > |a_6|$, 则满足 $S_n > 0$ 的 n 的最小值为 _____.

15. (5 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - kx, & x \geq 0, \\ kx^2 - x + 1, & x < 0. \end{cases}$ 若 $k=0$, 则不等式 $f(x) < 2$ 的解集为 _____; 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 则 k 的取值范围为 _____.

三、解答题. 共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列, $a_2=5$, 且 a_4 是 a_1, a_{13} 的等比中项.

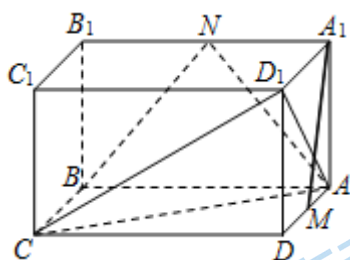
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和.

17. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 BCC_1B_1 是边长为 1 的正方形, $AB=2$, M, N 分别为 AD, A_1B_1 的中点.

(I) 求证: $MA_1 \parallel$ 平面 ANC ;

(II) 求直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值.



18. 已知函数 $f(x) = x^3 - 12x + 12$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-3, 4]$ 上的最大值和最小值;

(3) 若曲线 $f(x)$ 在点 A, B 处的切线互相平行, 写出 A, B 中点的坐标 (只需直接写出结果).

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求证数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = a_n + b_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $b_1 = 3$.

(i) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(ii) 若不等式 $\log_2(b_n - 2) < \frac{3}{16}n^2 + \lambda$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - a}{x} - a \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $a \geq e$ 时, 写出函数 $f(x)$ 的零点个数. (只需直接写出结果)

21. 若对于正整数 k , $g(k)$ 表示 k 的最大奇数因数, 例如 $g(3) = 3$, $g(10) = 5$. 设

$$S_n = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + \cdots + g(2^n).$$

(I) 求 $g(6)$, $g(20)$ 的值;

(II) 求 S_1, S_2, S_3 的值;

(III) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【解答】解： $\frac{1+i}{i} = -i+1$ ，故其模为 $\sqrt{2}$ 。

故选：A。

2. 【解答】解：设切点的横坐标为 x ，

则由题意可得： $y' = 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ 。

故选：B。

3. 【解答】解：由双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ ，可得 $a=1$ ， $b=\sqrt{2}$ ， $c=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ ，

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ 。

故选：B。

4. 【解答】解：由题知，圆心坐标 $(0, 0)$ ，半径 $\sqrt{5}$ ，

将直线 $ax - y + 2a = 0$ 化为点斜式得 $y = a(x+2)$ ，

知该直线过定点 $(-2, 0)$ ，

又 $(-2)^2 + 0^2 < 5$ ，故该定点在圆内，

所以该直线与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 必相交。

故选：C。

5. 【解答】解：因为 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1$ ， $n \geq 2$ ，且 $S_2 = 3$ ，

则

当 $n=2$ 时， $S_2 - S_1 = 3$ ，即 $S_1 = 0$ ，则 $a_1 = 0$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$ ，则 $a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$ ，

所以 $a_1 + a_3 = 5$ 。

故选：D。

6. 【解答】解：等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 a_5 = a_3$ ，

可得 $(a_3)^2 = a_3$

则 $a_3 = 1$ 。

故选：A。

7. 【解答】解：对于 A，由题意函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ，定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ ， $f(x) = \frac{x}{\ln x} = 0$ 无解，

A 错误；

又因为 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ ，当 $0 < x < 1$ 或 $1 < x < e$ 时， $f'(x) < 0$ ，故函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x > e$ 时， $f'(x) > 0$ ，故函数 $f(x)$ 单调递增，B 错误，C 正确；

当 $x > 1$, $f(x) \geq f(e)$ 又 $f(e) = e$,

所以 $f(x) \geq e$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x < 0$,

所以 $f(x) < 0$, 故函数 $f(x)$ 的值域不为 R , 故 D 错误.

故选: C .

8. 【解答】解: $\{a_n\}$ 是等比数列, 则由 “ $a_1 > a_2 > a_3$ ” 可得 “数列 $\{a_n\}$ 是递减数列”, 故充分性成立.

再由 “数列 $\{a_n\}$ 是递减数列”, 可得 “ $a_1 > a_2 > a_3$ ”, 故必要性成立.

综上可得, “ $a_1 > a_2 > a_3$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 是递减数列” 的充要条件,

故选: C .

9. 【解答】解: 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$, 则 $f'(x) = e^x(x^2 - 2)$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $e^x(x^2 - 2) = 0$, 解得 $x = \sqrt{2}$,

当 $x \in (0, \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 单调递增,

所以 $x = \sqrt{2}$ 是函数的一个极小值点,

又因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数,

所以 $x = -\sqrt{2}$ 是函数的另外一个极小值点,

即函数 $f(x)$ 的极值点的个数为 2.

故选: C .

10. 【解答】解: 对于①: 由 $a_{n-1} + a_{n+1} > 2a_n (n > 1, n \in N^*)$ 得 $a_{n+1} - a_n > a_n - a_{n-1}$,

所以若 $a_2 > a_1$, 则 $a_2 - a_1 > 0$,

$a_n - a_{n-1} > \dots > a_2 - a_1 > 0$, $a_n > a_{n-1} (n > 1, n \in N^*)$, 故①正确;

对于②: 取 $a_n = -\ln n$, 则满足 $a_{n-1} + a_{n+1} > 2a_n (n > 1, n \in N^*)$,

但当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $a_n \rightarrow -\infty$, 故②错误;

对于③: 由②的例子可知③也是错误的;

对于④: $a_{n-1} + a_{n+1} > 2a_n$ 得 $a_{n+1} - a_n > a_n - a_{n-1}$,

即 $a_{n+1} - a_n > a_n - a_{n-1} > \dots > a_2 - a_1$, 取 $d < a_2 - a_1$,

则 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) > a_1 + d + d + \dots + d = a_1 + (n-1)d$, 故④正确.

故选: C .

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【解答】解: 根据题意, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

若 $a_1 = 1$, $a_4 = \frac{1}{8}$, 则 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{1}{8}$, 则 $q = \frac{1}{2}$,

则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项 $\frac{1}{a_1} = 1$, 公比为 $\frac{1}{q} = 2$ 的等比数列,

则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前5项和为 $\frac{1 \times (1-2^5)}{1-2} = 31$,

故答案为: $\frac{1}{2}$, 31.

12. 【解答】解: $\because a_3 + a_9 = a_{10} - a_8$,

$$\therefore a_1 + 2d + a_1 + 8d = a_1 + 9d - (a_1 + 7d),$$

解得 $a_1 = -4d$

$$\therefore a_n = -4d + (n-1)d = (n-5)d,$$

令 $(n-5)d = 0$ 可解得 $n=5$ ($d \neq 0$)

故答案为: 5

13. 【解答】解: $\because f(x) = ax^2 - \ln x, x > 0, \therefore f'(x) = 2ax - \frac{1}{x}$,

$\because f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 内单调递增, $\therefore f'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

$\therefore 2ax - \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, $\therefore a \geq \frac{1}{2x^2}$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

$\therefore a \geq \left(\frac{1}{2x^2}\right)_{\max}, x \in [1, 2]$, 因为在 $[1, 2]$, $\left(\frac{1}{2x^2}\right)_{\max} = \frac{1}{2}$,

$\therefore a \geq \frac{1}{2}$, 则 a 的取值范围是: $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上存在单调递增区间, 则 $f'(x) > 0$ 在 $[1, 2]$ 上有解,

即 $a \geq \frac{1}{2x^2}$ 在 $[1, 2]$ 上有解, $\therefore a \geq \left(\frac{1}{2x^2}\right)_{\min}$,

又 $\left(\frac{1}{2x^2}\right)_{\min} = \frac{1}{8}$, $\therefore a > \frac{1}{8}$. 则 a 的取值范围是: $(\frac{1}{8}, +\infty)$.

故答案为: $[\frac{1}{2}, +\infty); (\frac{1}{8}, +\infty)$.

14. 【解答】解: 因为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$, 当 $n=5$ 时 S_n 取到最小值,

所以 $d > 0$, 所以 $a_5 < a_6$,

因为 $|a_5| > |a_6|$, 所以 $-a_5 < a_6$, 即 $-(a_1 + 4d) > a_1 + 5d$, 所以 $a_1 < -\frac{9}{2}d$.

$S_n = n(a_1 + \frac{(n-1)}{2}d) > 0$, 则 $a_1 + \frac{(n-1)}{2}d > 0$, 因为 $a_1 < -\frac{9}{2}d$,

所以 $-\frac{9}{2}d > -\frac{(n-1)}{2}d$, 解之得: $n > 10$, 因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 n 的最小值为 11.

故答案为: 11.

15. 【解答】解: $k=0$ 时, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}$,

$$f(x) < 2 \text{ 等价于 } \begin{cases} x \geq 0 \\ e^x < 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0 \\ 1-x < 2 \end{cases},$$

解得 $0 \leq x < \ln 2$ 或 $-1 < x < 0$,

所以 $-1 < x < \ln 2$;

由 $f(x)$ 恰有两个零点等价于 $e^x = kx$ ($x \geq 0$) 和 $kx^2 - x + 1 = 0$ ($x < 0$) 的实根的个数的和为 2.

当 $k=0$ 时, $e^x = kx$ ($x \geq 0$) 的解的个数为 0, $kx^2 - x + 1 = 0$ ($x < 0$) 的实根的个数为 0, 不符合题意;

当 $k < 0$ 时, $e^x = kx$ ($x \geq 0$) 无解, $kx^2 - x + 1 = 0$ ($x < 0$) 的实根的个数为 1, 不符合题意;

当 $k > 0$ 时, $kx^2 - x + 1 = 0$ ($x < 0$) 没有实数解,

则 $e^x = kx$ ($x \geq 0$) 有两解,

$$\text{设 } g(x) = \frac{e^x}{x} \quad (x > 0), \quad g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

可得 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增, 在 $(0, 1)$ 递减, 可得 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = e$,

当 $k > e$ 时, $y = g(x)$ 与 $y = k$ 有两个交点.

故答案为: $(-1, \ln 2); (e, +\infty)$.

三、解答题。共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 【解答】解: (1) $\because a_4$ 是 a_1, a_{13} 的等比中项,

$$\therefore a_4^2 = a_1 a_{13},$$

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $(a_2 + 2d)^2 = (a_2 - d)(a_2 + 11d)$,

即 $(5 + 2d)^2 = (5 - d)(5 + 11d)$, 整理得: $d^2 - 2d = 0$,

$\because d \neq 0$,

$\therefore d = 2$,

$\therefore a_n = a_2 + (n - 2)d = 5 + 2(n - 2) = 2n + 1$;

(2) 由于 (1) 得 $a_n = 2n + 1$, 则 $S_n = \frac{n(2n+1)}{2} = n^2 + \frac{n}{2}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right).$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+\frac{1}{2})}.$$

17. 【解答】(I) 证明: 取 AC 的中点 O , 连结 OM, ON ,

因为 M 是 AD 的中点, 所以 $OM \parallel CD$, $OM = \frac{1}{2}CD$,

在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 因为 N 是 A_1B_1 的中点,

所以 $NA_1 \parallel CD$, $NA_1 = \frac{1}{2}CD$,

所以 $NA_1 \parallel OM$ 且 $NA_1 = OM$,

所以四边形 $NOMA_1$ 是平行四边形, 所以 $MA_1 \parallel ON$,

又因为 $MA_1 \not\subset$ 平面 ANC , $ON \subset$ 平面 ANC ,

所以 $MA_1 \parallel$ 平面 ANC ;

(II) 解: 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 以点 B 为坐标原点, 建立空间直角坐标系如图所示,

则 $C(1, 0, 0)$, $A(0, 2, 0)$, $D_1(1, 2, 1)$, $N(0, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{CN} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{CA} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{CD_1} = (0, 2, 1)$,

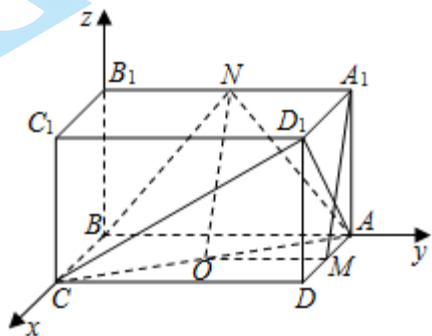
设平面 D_1AC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases},$$

令 $y = 1$, 则 $x = 2$, $z = -2$, 故 $\vec{n} = (2, 1, -2)$,

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{CN}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CN}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



18. 【解答】解: (1) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$,

当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以, 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 取极大值 $f(-2) = 28$; 当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取极小值 $f(2) = -4$.

(2) 由 (1) 知, 当 $-3 < x < -2$ 时, $f(x)$ 单调递增;

当 $-2 < x < 2$ 时, $f(x)$ 单调递减; 当 $2 < x < 4$ 时, $f(x)$ 单调递增;

当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 取极大值 $f(-2) = 28$; 当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取极小值 $f(2) = -4$.

又 $f(-3) = 19$, $f(4) = 28$,

所以, $f(x)$ 在区间 $[-3, 4]$ 上的最大值为 28, 最小值为 -4.

(3) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$,

由题意 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 即 $3x_1^2 - 12 = 3x_2^2 - 12$,

$\therefore (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, 则 $x_1 + x_2 = 0$,

$$\therefore y_1 + y_2 = x_1^3 - 12x_1 + 12 + x_2^3 - 12x_2 + 12 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 12(x_1 + x_2) + 24 = 24,$$

$\therefore A, B$ 中点的坐标为 $(0, 12)$.

19. 【解答】解：(1) 证明：因为 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$, 解得 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1) = 2a_n - 2a_{n-1}$, 则 $a_n = 2a_{n-1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 首项为 1, 公比为 2.

(2) (i) 因为数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = a_n + b_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $b_1 = 3$,

所以 $b_{n+1} - b_n = a_n = 2^{n-1}$,

则 $b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_2 - b_1) + b_1$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1 + 3$$

$$= \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 3$$

$$= 2^{n-1} + 2.$$

(ii) 因为不等式 $\log_2(b_n - 2) < \frac{3}{16}n^2 + \lambda$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,

$$\text{则 } \lambda > -\frac{3}{16}n^2 + n - 1, \text{ 令 } g(n) = -\frac{3}{16}n^2 + n - 1 = -\frac{3}{16}(n - \frac{8}{3})^2 + \frac{1}{3} \leq g(3) = \frac{5}{16},$$

$$\text{所以 } \lambda > \frac{5}{16},$$

所以实数 λ 的取值范围为 $(\frac{5}{16}, +\infty)$.

20. 【解答】解：(1) 由 $f(x) = \frac{e^x - a}{x} - a \ln x$, 可得 $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - ax + a}{x^2}$,

则 $f'(1) = 0$ 且 $f(1) = e - a$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 $y = e - a$.

(2) 由函数 $f(x) = \frac{e^x - a}{x} - a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{(x-1)(e^x - a)}{x^2}$,

若 $a \leq 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

若 $a > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = \ln a$,

① 若 $\ln a \leq 0$ 时, 即 $0 < a \leq 1$ 时,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

②若 $0 < \ln a < 1$ 时, 即 $1 < a < e$ 时,

当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\ln a, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\ln a, 1)$, 单调递增区间为 $(0, \ln a)$, $(1, +\infty)$;

③若 $\ln a = 1$ 时, 即 $a = e$ 时, 可得 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

④若 $\ln a > 1$ 时, 即 $a > e$ 时,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1, \ln a)$, 单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\ln a, +\infty)$.

综上所述, 当 $0 < a \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

当 $1 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\ln a, 1)$, 单调递增区间为 $(0, \ln a)$, $(1, +\infty)$;

当 $a = e$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1, \ln a)$, 单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\ln a, +\infty)$.

(3) 由 (2) 知, 当 $a = e$ 时, 可得 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增,

又由 $f(x) = \frac{e^x - e}{x} - e \ln x$, 可得 $f(1) = 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点;

当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1, \ln a)$, 单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\ln a, +\infty)$,

当 $x = 1$ 时, 函数取得极大值, 极大值为 $f(1) = e^1 - a$,

当 $x = \ln a$ 时, 函数取得极小值 $f(\ln a)$, 其中 $f(\ln a) < f(1) = e^1 - a < 0$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点,

综上可得, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点.

21. 【解答】解: (I) $\because g(k)$ 表示 k 的最大奇数因数,

$$\therefore g(6) = 3, g(20) = 5. \quad \dots (2 \text{ 分})$$

$$(II) S_1 = g(1) + g(2) = 1 + 1 = 2; S_2 = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 1 + 1 + 3 + 1 = 6;$$

$$S_3 = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6) + g(7) + g(8) = 1 + 1 + 3 + 1 + 5 + 3 + 7 + 1 = 22. \quad \dots (6 \text{ 分})$$

$$(III) \text{ 由 (I) (II) 不难发现对 } m \in \mathbb{N}^*, \text{ 有 } g(2m) = g(m). \quad \dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + \dots + g(2^n - 1) + g(2^n)$$

$$= [g(1) + g(3) + g(5) + \dots + g(2^n - 1)] + [g(2) + g(4) + \dots + g(2^n)]$$

$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2^n - 1)] + [g(2 \times 1) + g(2 \times 2) + \dots + g(2 \times 2^{n-1})]$$

$$= \frac{(1+2^n-1) \times 2^{n-1}}{2} + [g(1) + g(2) + \cdots + g(2^{n-1})] = 4^{n-1} + S_{n-1} \cdots (11 \text{ 分})$$

于是 $S_n - S_{n-1} = 4^{n-1}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

所以 $S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4^2 + 4 + 2$

$$= \frac{4(1-4^{n-1})}{1-4} + 2 = \frac{4^n}{3} + \frac{2}{3}, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad \cdots (13 \text{ 分})$$

又 $S_1 = 2$, 满足上式,

所以对 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{3}(4^n + 2)$. $\cdots (14 \text{ 分})$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯