2018 北京石景山区高三（上）期末

数　　学（文）

本试卷共 6 页，150 分．考试时长 120 分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后上交答题卡．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．若集合 $A=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\,|\,x<-1或x>4\}$，则集合 $A\cap B$ 等于（　　）

A．$\{x\,|\,x\leqslant 3或x>4\}$　　B．$\{x\,|\,-1<x\leqslant 3\}$

C．$\{x\,|\,-2\leqslant x<-1\}$　　D．$\{x\,|\,3\leqslant x<4\}$

2．设 i 是虚数单位，则复数 $\dfrac{i}{1+i}$ 在复平面内所对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ x\leqslant y,\\ 2x+y\geqslant 3,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为（　　）

A．3　　B．4　　C．6　　D．9

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+x, & x>0\\ \sin x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 则下列结论正确的是（　　）

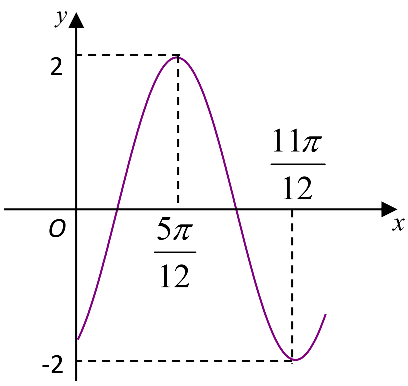
A．$f(x)$ 是偶函数　　B．$f(x)$ 是增函数

C．$f(x)$ 是周期函数　　D．$f(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$

5．“$m>10$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m-10}-\dfrac{y^2}{m-8}=1$ 表示双曲线”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

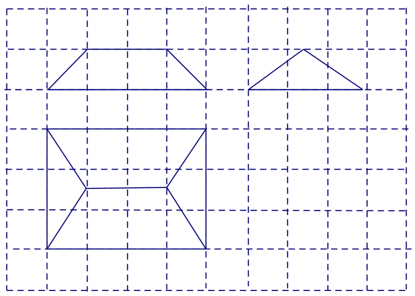


6．函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0，|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 ω,φ 的值分别是（　　）

A．$2,-\dfrac{\pi}{3}$　B．$2,-\dfrac{\pi}{6}$　C．$4,-\dfrac{\pi}{6}$　D．$4,\dfrac{\pi}{3}$

7．《九章算术》卷五商功中有如下问题：今有刍甍（底面为矩形的屋脊状的几何体），下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈，问积几何．下图网格纸中实线部分为此刍甍的三视图，设网格纸上每个小正方形的边长为1丈，

那么此刍甍的体积为（　　）



A. 3 立方丈　　B. 5 立方丈　　C. 6 立方丈　　D. 12 立方丈

8．小明在如图 1 所示的跑道上匀速跑步，他从点 A 出发，沿箭头方向经过点 B 跑到点 C，共用时 $30s$，他的教练选择了一个固定的位置观察小明跑步的过程，设小明跑步的时间为 $t(s)$，他与教练间的距离为 $y(m)$，表示 y 与 t 的函数关系的图象大致如图 2 所示，则这个固定位置可能是图 1 中的（　　）

A. 点 M　　B. 点 N

C. 点 P　　D. 点 Q

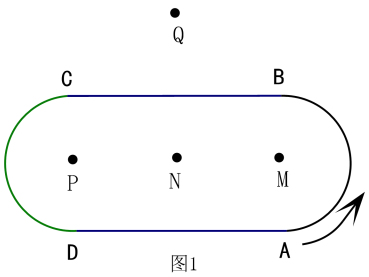


图1

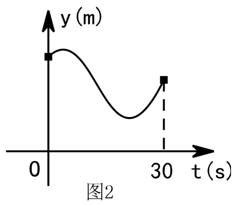
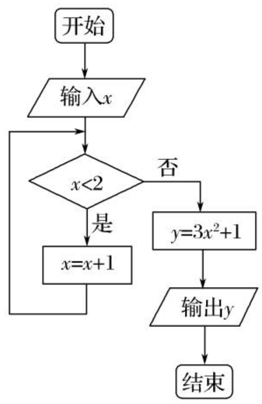


图2

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．



9．若 $a=\ln\frac{1}{2}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.8}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则 a,b,c 的大小关系为_______.

10．抛物线 $y^2=4x$ 上一点 $(2,2\sqrt{2})$ 到此抛物线焦点的距离为_______.

11．执行右面的程序框图，若输入的 x 的值为 0，则输出的 y 的值是________.

12．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且对任意的 $m,n\in N^*$ 有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，则 $a_6=$______ .

13．平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$_______ .

14．若集合 $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$，且下列四个关系：

①$a=1$；②$b\neq1$；③$c=2$；④$d\neq4$ 有且只有一个是正确的.

请写出满足上述条件的一个有序数组 (a,b,c,d)__________，符合条件的全部有序数组 (a,b,c,d) 的个数是

_________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题共 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列，$a_1 \cdot a_4 = 8$，$a_2 + a_3 = 6$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

16.（本小题共 13 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上一点，$AD = 6$，$BD = 3$，$DC = 2$.

（Ⅰ）若 $\angle ADB = \dfrac{\pi}{2}$，求 $\angle BAC$ 的大小；

（Ⅱ）若 $\angle ADB = \dfrac{2\pi}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

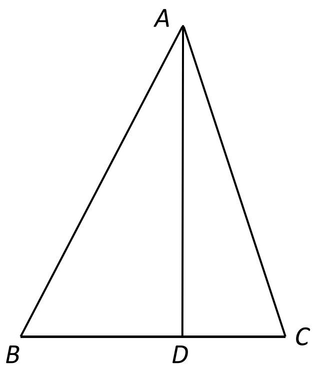


图 1

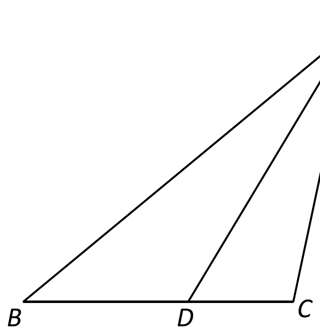


图 2

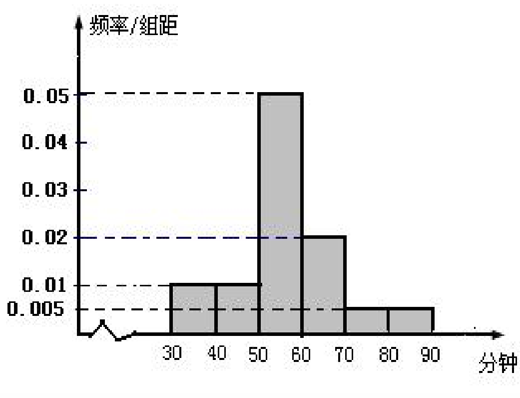
17.（本小题共 13 分）

某学校高三年级共有1000名学生，其中男生650人，女生350人，为了调查学生周末的休闲方式，用分层抽样的方法抽查了200名学生.

（Ⅰ）完成下面的 2×2 列联表；

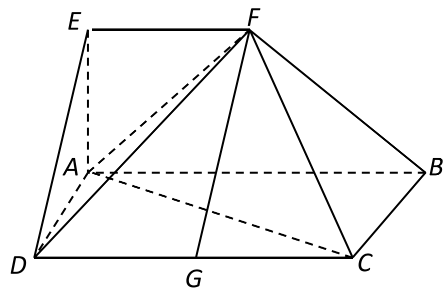
	不喜欢运动	喜欢运动	合计
女生	50		
男生			
合计		100	200

（Ⅱ）在抽取的样本中，调查喜欢运动女生的运动时间，发现她们的运动时间介于30分钟到90分钟之间，右图是测量结果的频率分布直方图，若从区间段 $[40,50)$ 和 $[60,70)$ 的所有女生中随机抽取两名女生，求她们的运动时间在同一区间段的概率.



18.（本小题共 14 分）

如图，在多面体 $ABCDFE$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB//EF$，$AE=AD=1$，$AB=2EF=2$，$\angle EAB=90^\circ$，平面$ABFE\perp$平面$ABCD$.



（Ⅰ）若 G 点是 DC 中点，求证：$FG//$平面AED；

（Ⅱ）求证：$BF\perp$平面DAF；

（Ⅲ）求三棱锥 $D-AFC$ 的体积.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率等于 $\dfrac{1}{2}$，$P(2,3)$、$Q(2,-3)$ 是椭圆上的两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）A,B 是椭圆上位于直线 PQ 两侧的动点，若直线 AB 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.

20.（本小题共 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{a}{2}x^2-2x(a\in R)$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $f'\left(x\right)<a-2$ 成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若过点 $(0,-\dfrac{1}{3})$ 可作函数 $y=f\left(x\right)$ 图象的三条不同切线，求实数 a 的取值范围.

数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	D	A	A	B	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$a<b<c$	3	13	64	$2\sqrt{3}$	(3, 2, 1, 4)；6

（第 14 题第一空 3 分，(3, 2, 1, 4)，(2, 3, 1, 4) (3, 1, 2, 4) (3, 1, 4, 2) (4, 1, 3, 2) (2, 1, 4, 3) 任选一个即可，第二空 2 分）

三、解答题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a_1\cdot a_4=a_2\cdot a_3=8$ 及 $a_2+a_3=6$ …………2 分

得 $\begin{cases}a_2=2\\a_3=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_3=2\\a_2=4\end{cases}$（舍） …………4 分

所以 $\dfrac{a_3}{a_2}=q=2$， $a_1=1$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$ …………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=a_n+\log_2 a_{n+1}=2^{n-1}+n$ …………7 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})+(1+2+\cdots+n)$ …………9 分

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}+\dfrac{(1+n)n}{2}$

$=2^n-1+\dfrac{n^2+n}{2}$ …………13 分

16.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）设 $\angle BAD=\alpha$， $\angle CAD=\beta$，

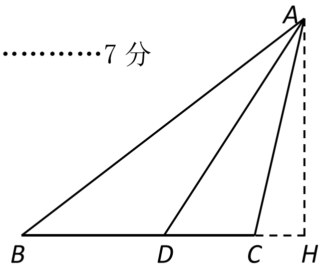
则 $\tan\alpha=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{1}{2}$， $\tan\beta=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{1}{3}$ …………2 分

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ …………5 分

因为 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，

即 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$. …………7 分



（Ⅱ）过点 A 作 $AH\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H，

因为 $\angle ADB=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $AH=AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$； …………11 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$. …………13 分

17.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）根据分层抽样的定义，可知抽取男生 130 人，女生 70 人， …………1 分

	不喜欢运动	喜欢运动	合计
女生	50	20	70
男生	50	80	130
合计	100	100	200

…………5 分

（Ⅱ）由直方图可知在 $[40,50)$ 内的人数为 2 人，设为 m,n，

在 $[60,70)$ 内的人数为 4 人，设为 a,b,c,d. ……6 分

设“两人的运动时间在同一区间段”的事件为 A. ………7 分

从中抽取两名女生的可能情况有：

$(m,n),(m,a),(m,b),(m,c),(m,d),(n,a),(n,b)$，

$(n,c),(n,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)$ …10 分

两人的运动时间恰好在同一区间段的可能情况有 7 种.

$P(A)=\dfrac{7}{15}$ ………13 分

18.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）证明:因为 $EF//AB,EF=\dfrac{1}{2}AB$， $DG//AB,DG=\dfrac{1}{2}AB$，

所以 $EF//DG,EF=DG$， …………2 分

所以四边形 $EFGD$ 为平行四边形，

所以 $FG // ED$；　　…………4 分

又因为 $ED \subset$ 面AED, $FG \not\subset$ 面AED，

所以 $FG //$ 面AED.　　…………5 分

（Ⅱ）证明:因为平面 $ABFE \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $ABFE \cap$ 平面 $ABCD = AB$, 又因为 $AD \perp AB$，

所以 $AD \perp$ 面$ABFE$；

因为 $BF \subset$ 面$ABFE$，

所以 $AD \perp BF$；　　…………8 分

因为 $AB // EF$， $\angle EAB = 90°$，

所以 $AF = BF = \sqrt{2}$，

所以 $AF^2 + BF^2 = AB^2$，

所以 $AF \perp BF$；　　…………10 分

又因为 $AD \cap AF = A$

所以 $BF \perp$ 面DAF .　　…………11 分

（Ⅲ）　$V_{D-AFC} = V_{F-ADC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ADC} \cdot EA = \frac{1}{3}$.　　…………14 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$， 又 $a^2 = b^2 + c^2$，

所以 $a^2 = 4c^2, b^2 = 3c^2$　　……… 2 分

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 代入 $(2,3)$, 得 $c^2 = 4, a^2 = 16, b^2 = 12$　　………4 分

椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$　　……… 5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$　　………6 分

设 AB 方程为 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + t \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$， 代入化简得： $x^2 + tx + t^2 - 12 = 0$　　………8 分

$\Delta = t^2 - 4(t^2 - 12) > 0$， $-4 < t < 4$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -t \\ x_1 x_2 = t^2 - 12 \end{cases}$， 又 $P(2,3), Q(2,-3)$

$S_{APBQ}=S_{\Delta APQ}+S_{\Delta BPQ}$

$=\frac{1}{2}\times 6\times|x_1-x_2|=3\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{48-3t^2}$ ………13 分

当 $t=0$ 时，S 最大为 $12\sqrt{3}$ ………14 分

20.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=3$ 时，$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x$，得 $f'(x)=-x^2+3x-2$． .....1 分

因为 $f'(x)=-x^2+3x-2=-(x-2)(x-1)$，

所以当 $1<x<2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x<1$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减．

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,2)$，单调递减区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$ ....4 分

（Ⅱ）由 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-2x$，得 $f'(x)=-x^2+ax-2$．

因为对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $f'(x)<a-2$ 成立，

即对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $-x^2+ax-2<a-2$ 成立，

即对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $a<\frac{x^2}{x-1}$ 成立，

设 $g(x)=\frac{x^2}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$，

则 $g(x)=\frac{x^2}{x-1}=2+x-1+\frac{1}{x-1}\geq 4$

等号成立当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$ 即 $x=2$．

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,4)$． ....9 分

（Ⅲ）设点 $P(t,-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2-2t)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象上的切点，

则过点 P 的切线的斜率为 $k=f'(t)=-t^2+at-2$，

所以过点 P 的切线方程为 $y+\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2+2t=(-t^2+at-2)(x-t)$．

因为点 $(0,-\frac{1}{3})$ 在切线上，$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2+2t=(-t^2+at-2)(0-t)$

即 $\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{3}=0$．

若过点 $(0,-\frac{1}{3})$ 可作函数 $y=f(x)$ 图象的三条不同切线，

则方程 $\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{3}=0$ 有三个不同的实数解.

令 $h(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{3}$，则函数 $y=h(t)$ 与 t 轴有三个不同的交点.

令 $h'(t)=2t^2-at=0$，解得 $t=0$ 或 $t=\frac{a}{2}$.

因为 $h(0)=\frac{1}{3}$，$h(\frac{a}{2})=-\frac{1}{24}a^3+\frac{1}{3}$，

所以必须 $h(\frac{a}{2})=-\frac{1}{24}a^3+\frac{1}{3}<0$，即 $a>2$.

所以实数 a 的取值范围为 $(2,+\infty)$.　　. .... 13 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao