2023 北京一六一中高三（上）期中

数　学

班级______　姓名______　学号______

考生须知

1.本试卷共 3 页，满分 150 分，考试时长 120 分钟.

2.试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效.

3.在答题纸上，选择题用 2B 铅笔作答，非选择题用黑色字迹签字笔作答.

4.考试结束后，将答题纸、试卷和草稿纸一并交回.

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|0<x<3\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $y=\log_2 x$　　B. $y=2^{-x}$　　C. $y=\sqrt{x+1}$　　D. $y=x^3$

3. 如果平面向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(1,1)$，那么下列结论中正确的是（　）.

A. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}$　　C. $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$　　D. $\vec{a}\parallel\vec{b}$

4. “$x<\dfrac{\pi}{4}$”是“$\tan x<1$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知复数 $z=a+i$（$a\in R$），则下面结论正确的是（　）

A. $\bar{z}=-a+i$

B. $|z|\geq 1$

C. z 一定不是纯虚数

D. 在复平面上，z 对应的点可能在第三象限

6. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点为 F_1,F_2 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 与 A,B 两点，若△AF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　　C. $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 近年来纯电动汽车越来越受消费者的青睐，新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口.Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C（单位：Ah），放电时间 t（单位：h）与放电电流 I（单位：A）之间关系的经验公式：$C=I^n\cdot t$，其中 n 为 Peukert 常数.为测算某蓄电池的 Peukert 常数 n，在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I=20\text{A}$ 时，放电时间 $t=20\text{h}$；当放电电流 $I=50\text{A}$ 时，放电时间 $t=5\text{h}$.若计算时取 $\lg 2\approx 0.3$，则该蓄电池的 Peukert 常数 n 大约为（　）

A. 1.25　　B. 1.5　　C. 1.67　　D. 2

8. 在平面直角坐标系中，当 θ，m 变化时，点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $x-my+3m-4=0$ 的距离最大值为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

9. 如果方程 $\frac{x^2}{4}+y|y|=1$ 所对应的曲线与函数 $y=f(x)$ 的图象完全重合，则如下结论正确的个数（　）

①函数 $f(x)$ 是偶函数；

② $y=f(x)$ 的图象上的点到坐标原点距离的最小值为 1；

③函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,2]$；

④函数 $F(x)=f(x)+x$ 有且只有一个零点.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2-x+3$.若存在 $x_1,x_2,\dots,x_n\in[0,\frac{9}{2}]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+g(x_n)=g(x_1)+g(x_2)+\dots+g(x_{n-1})+f(x_n)$，则 n 的最大值为（　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程是______

12. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若 $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，则 ω 的最小值为________.

13. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=4$，且 $|\overrightarrow{AP}|=1$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$______，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的最大值为______.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\le a,\\ x^3, x>a.\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数，则 a 的一个取值为__________.

15. 下表是某生活超市 2021 年第四季度各区域营业收入占比和净利润占比统计表：

	生鲜区	熟食区	乳制品区	日用品区	其它区
营业收入占比	48.6%	15.8%	20.1%	10.8%	4.7%

净利润占比	65.8%	–4.3%	16.5%	20.2%	1.8%

该生活超市本季度的总营业利润率为32.5%（营业利润率是净利润占营业收入的百分比），给出下列四个结论：

①本季度此生活超市营业收入最低的是熟食区；

②本季度此生活超市的营业净利润超过一半来自生鲜区；

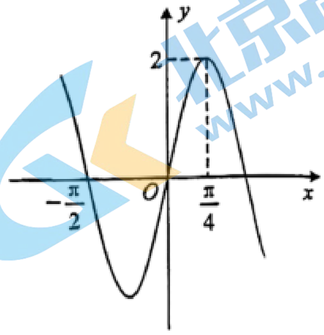
③本季度此生活超市营业利润率最高的是日用品区；

④本季度此生活超市生鲜区的营业利润率超过40%.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题：本大题共6小题，共85分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并写在答题纸相应位置.

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x)(\omega>0)$ 的图象如图所示.



（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若 $g(x)=f(x)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B\neq\frac{\pi}{2}$，$\cos 2B=\sqrt{3}\cos B-1$.

（1）求 $\angle B$；

（2）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\sin A=\sqrt{3}\sin C$，$b=2$；

条件②：$2b=3a$，$b\sin A=1$；

条件③：$AC=\sqrt{6}$，BC 边上的高为 2.

注：如果选择的条件不符合要求，第二问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，则按第一个解答计分.

18. 2021年12月9日，《北京市义务教育体育与健康考核评价方案》发布.义务教育体育与健康考核评价包括过程性考核与现场考试两部分，总分值70分.其中过程性考核40分，现场考试30分.该评价方案从公布之日施行，分学段过渡、逐步推开.现场考试采取分类限选的方式，把内容划分了四类，必考、选考共设置

22 项考试内容.某区在九年级学生中随机抽取 1100 名男生和 1000 名女生作为样本进行统计调查，其中男生和女生选考乒乓球的比例分别为10%和5%，选考 1 分钟跳绳的比例分别为40%和50%.假设选考项目中所有学生选择每一项相互独立.

（1）从该区所有九年级学生中随机抽取 1 名学生，估计该学生选考乒乓球的概率；

（2）从该区九年级全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人选考 1 分钟跳绳的概率；

（3）已知乒乓球考试满分 8 分.在该区一次九年级模拟考试中，样本中选考乒乓球的男生有 60 人得 8 分，40 人得 7.5 分，其余男生得 7 分；样本中选考乒乓球的女生有 40 人得 8 分，其余女生得 7 分.记这次模拟考试中，选考乒乓球的所有学生的乒乓球平均分的估计值为μ_1，其中男生的乒乓球平均分的估计值为μ_2，试比较μ_1与μ_2的大小.（结论不需要证明）

19. 已知A，B，C是椭圆W：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$上的三个点，O是坐标原点.

（1）当点B是椭圆W的右顶点，且四边形$OABC$为菱形时，求此菱形的面积；

（2）过右焦点F的直线l（与x轴不重合）与椭圆交于A，B两点，点$M\left(0,m\right)$，若$|MA|=|MB|$，求实数m的取值范围.

20. 已知函数$f(x)=\dfrac{-ax^2+x-1}{e^x}$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(0,-1)$处的切线方程；

（2）当$a>0$时，求$f(x)$的单调区间；

（3）求证：当$a\le -1$时，$f(x)\ge -e$.

21. 设N为正整数，区间$I_k=[a_k,a_k+1]$（其中$a_k\in\mathbf{R}$，$k=1,2,\cdots,N$）同时满足下列两个条件：

①对任意$x\in[0,100]$，存在k使得$x\in I_k$；

②对任意$k\in\{1,2,\cdots,N\}$，存在$x\in[0,100]$，使得$x\notin I_i$（其中$i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,N$）.

（I）判断$a_k(k=1,2,\cdots,N)$能否等于$k-1$或$\dfrac{k}{2}-1$；（结论不需要证明）.

（II）求N的最小值；

（III）研究N是否存在最大值，若存在，求出N的最大值；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1.【答案】C

【分析】化简 B，再进行并集运算.

【详解】$B=\{x\in \mathbf{N}|0<x<3\}=\{1,2\}$，

又 $A=\{0,1\}$，则 $A\cup B=\{0,1,2\}$.

故选：C.

2.【答案】B

【分析】根据函数解析式直接判断单调性.

【详解】A 选项：函数 $y=\log_2 x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，A 选项错误；

B 选项：函数 $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的定义域为 R，且在 R 上单调递减，B 选项正确；

C 选项：函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $[-1,+\infty)$，且在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，C 选项错误；

D 选项：函数 $y=x^3$ 的定义域为 R，且在 R 上单调递增，D 选项错误；

故选：B.

3.【答案】C

【详解】由平面向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(1,1)$ 知：

在 A 中，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，

$\therefore |\vec{a}|\neq|\vec{b}|$，故 A 错误；

在 B 中，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，故 B 错误；

在 C 中，$\vec{a}-\vec{b}=(1,-1)$，

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=1-1=0$，

$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，故 C 正确；

在 D 中，$\because \frac{2}{1}\neq\frac{0}{1}$，

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行，故 D 错误.

综上所述.

故选 C .

4.【答案】D

【分析】根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】由 $x<\frac{\pi}{4}$ 推不出 $\tan x<1$，如 $x=-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，但是 $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，

即充分性不成立，

由 $\tan x<1$ 也推不出 $x<\frac{\pi}{4}$，如 $\tan\frac{3\pi}{4}=-1<1$，但是 $\frac{3\pi}{4}>\frac{\pi}{4}$，即必要性也不成立，

所以“$x<\frac{\pi}{4}$”是“$\tan x<1$”的既不充分也不必要条件.

故选：D

5.【答案】B

【分析】利用复数基本概念逐一核对四个选项得答案.

【详解】解：$\because z=a+i(a\in R)$，$\therefore \bar{z}=a-i$，故 A 错误；

$|z|=\sqrt{a^2+1}\geqslant 1$，故 B 正确；

当 $a=0$ 时，z 为纯虚数，故 C 错误；

$\because$ 虚部为 1 大于 0，$\therefore$ 在复平面上，z 对应的点不可能在第三象限，故 D 错误.

故选：B.

【点睛】本题考查复数的基本概念，是基础题.

6.【答案】A

【详解】若△AF₁B 的周长为 $4\sqrt{3}$，

由椭圆的定义可知 $4a=4\sqrt{3}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，

$\because e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore c=1$，

$\therefore b^2=2$，

所以方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，故选 A.

考点：椭圆方程及性质

7.【答案】B

【分析】由已知可得出 $\begin{cases}20^n\times 20=C\\50^n\times 5=C\end{cases}$，可得出 $\left(\frac{5}{2}\right)^n=4$，利用指数与对数的互化、换底公式以及对数的运算法则计算可得 n 的近似值.

【详解】由题意可得 $\begin{cases}20^n\times 20=C\\50^n\times 5=C\end{cases}$，所以 $20^n\times 20=50^n\times 5$，所以 $\left(\frac{5}{2}\right)^n=4$，

所以 $n=\log_{\frac{5}{2}}4=\frac{\lg 4}{\lg\frac{5}{2}}=\frac{2\lg 2}{\lg\frac{10}{4}}=\frac{2\lg 2}{1-2\lg 2}\approx\frac{2\times 0.3}{1-2\times 0.3}=1.5$.

故选：B.

8.【答案】D

【分析】求出直线过定点坐标，以及点 P 的轨迹方程，再求出定点到圆心的距离，即可得解.

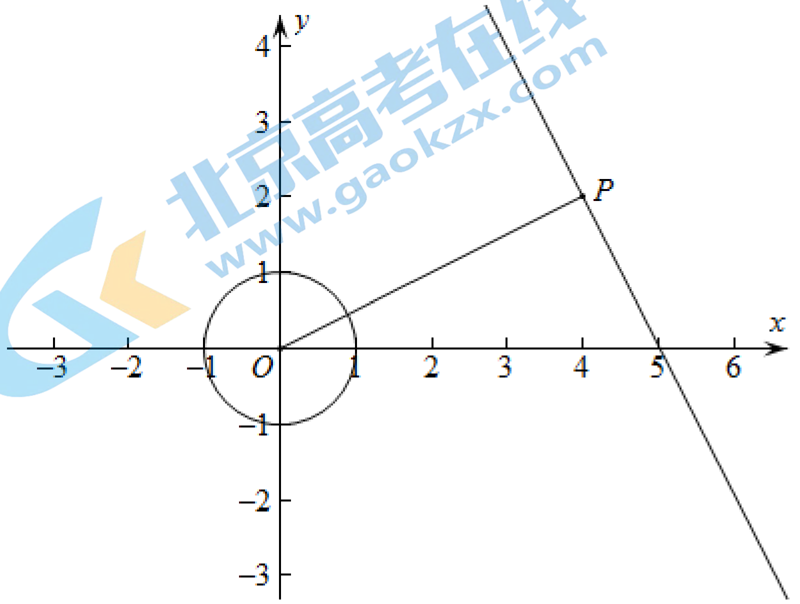
【详解】直线 $x-my+3m-4=0$，即 $\left(-y+3\right)m+\left(x-4\right)=0$，令 $\begin{cases}-y+3=0\\x-4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$，

所以直线 $x-my+3m-4=0$ 恒过点 $P\left(4,3\right)$，

又点 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$ 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的点，圆心为 $O\left(0,0\right)$，半径 $r=1$，

则 $\left|OP\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

所以点 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$ 到直线 $x-my+3m-4=0$ 的距离最大值为 $\left|OP\right|+r=6$.



故选：D

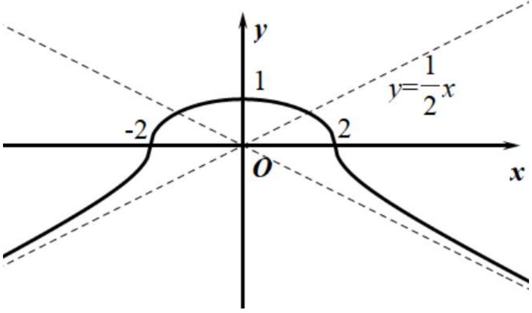
9.【答案】C

【分析】分段讨论探究函数的图象，结合椭圆与双曲线的方程作出函数的图象，结合图象判断即可.①由图象的对称性可知；②利用双曲线与椭圆的方程消元求最值；③结合图象可知值域；④函数的零点个数转化为两函数 $y=f(x)$ 与 $y=-x$ 图象交点的个数，结合图象可得.

【详解】当 $y\geq0$ 时，$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，即方程对应曲线为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上半部分；

当 $y<0$ 时，$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，即方程对应曲线为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的下半部分；

故作出函数 $f(x)$ 的图象，其中双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.



①函数 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 为偶函数；

且 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}, x\in[-2,2]\\ -\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}, x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\end{cases}$

证明如下：

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

$\forall x\in[-2,2]$ 时，$-x\in[-2,2]$，

则 $f(-x)=\sqrt{1-\frac{(-x)^2}{4}}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=f(x)$；

$\forall x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 时，$-x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，

则 $f(-x)=-\sqrt{\frac{(-x)^2}{4}-1}=-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=f(x)$.

综上，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.故①正确.

②设函数 $y=f(x)$ 图象上任意点 $P(x_0,y_0)$，$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，

当点 P 在双曲线上时，即 $x_0\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 时，$x_0^2>4$，$y_0^2=\frac{x_0^2}{4}-1$，

则 $x_0^2+y_0^2=x_0^2+\frac{x_0^2}{4}-1=\frac{5x_0^2}{4}-1>4$，$\sqrt{x_0^2+y_0^2}>2$；

当点 P 在椭圆上时，即 $x_0\in[-2,2]$ 时，$x_0^2\le 4$，$y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$，

由 $x_0^2+y_0^2=x_0^2+1-\frac{x_0^2}{4}=\frac{3x_0^2}{4}+1\ge 1$，$\sqrt{x_0^2+y_0^2}\ge 1$

当且仅当 $x_0=0$ 时，$|OP|$ 最小，即点 $P(0,1)$ 到原点的距离最小，最小值为1；

综上，函数 $y=f(x)$ 的图象上的点到坐标原点距离的最小值为 1，故②正确；

③由函数图象可知，函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]$，故③错误；

④由 $f(x)+x=0$ 得，$f(x)=-x$，

所以函数 $F(x)=f(x)+x$ 的零点的个数，

即函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-x$ 图象的交点个数.

由 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 是双曲线的渐近线，

渐近线斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，而直线 $y=-x$ 的斜率为 -1，

由 $|-1|>\left|-\dfrac{1}{2}\right|$ 可知，直线 $y=-x$ 与函数 $f(x)$ 图象的双曲线部分没有交点，

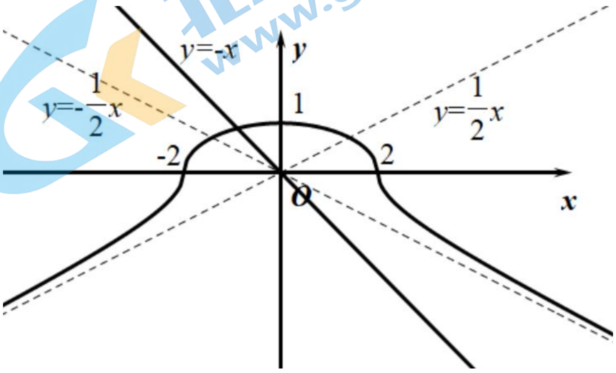
仅与椭圆部分有一个交点.

故函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-x$ 图象有且只有一个交点，

即函数 $F(x)=f(x)+x$ 有且只有一个零点，故④正确.

故结论正确的个数为3.

故选：C.



10.【答案】D

【分析】构造函数 $h(x)=g(x)-f(x)$，研究 $h(x)$ 的单调性.

【详解】方程 $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+g(x_n)=g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_{n-1})+f(x_n)$ 变形为：

$g(x_n)-f(x_n)=(g(x_1)-f(x_1))+(g(x_2)-f(x_2))+\cdots+(g(x_{n-1})-f(x_{n-1}))$，

设 $h(x)=g(x)-f(x)$，则 $h(x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$，

$h(x)=g(x)-f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 在 $[0,1]$ 上递减，在 $[1,\dfrac{9}{2}]$ 上递增，

$\therefore 2\le h(x)\le\dfrac{57}{4}$，

$\therefore h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$ 的值域是 $[2(n-1),\dfrac{57}{4}(n-1)]$，

若存在 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,\dfrac{9}{2}]$，使得 $h(x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$，

则 $2\le 2(n-1)\le\dfrac{57}{4}$，$2\le n\le\dfrac{65}{8}$，$\therefore n$ 的最大值为 8.

故选：D.

【点睛】本题考查函数的值域，解题关键是构造新函数 $h(x)=g(x)-f(x)$，把问题转化为“存在 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,\frac{9}{2}]$，使得 $h(x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_{n-1})$”，这样利用 $h(x)$ 的值域就可以解决问题.

二、填空题：共5小题，每小题5分，共25分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11.【答案】$y=-1$

【分析】先根据抛物线的标准方程得到焦点在 y 轴上以及 $2p=4$，再直接代入即可求出其准线方程.

【详解】因为抛物线的标准方程为 $x^2=4y$，焦点在 y 轴上，

所以：$2p=4$，即 $p=2$，所以 $\frac{p}{2}=1$，

所以准线方程为：$y=-1$，

故答案是：$y=-1$.

【点睛】该题考查的是有关抛物线的几何性质，涉及到的知识点是已知抛物线的标准方程求其准线方程，属于简单题目.

12.【答案】$\frac{2}{3}$

【分析】根据题意 $f\left(x\right)$ 取最大值 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，根据余弦函数取最大值条件解得 ω 的表达式，进而确定其最小值.

【详解】因为 $f\left(x\right)\le f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，所以 $f\left(x\right)$ 取最大值 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi(k\in Z),\therefore\omega=8k+\frac{2}{3}(k\in Z)$，

因为 $\omega>0$，所以当 $k=0$ 时，ω 取最小值为 $\frac{2}{3}$.

【点睛】函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$ 的性质

（1）$y_{\max}=A+B$，$y_{\min}=A-B$.

（2）周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

（3）由 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 求对称轴，最大值对应自变量满足 $\omega x+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，最小值对应自变量满足 $\omega x+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

（4）由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 求增区间；由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x+\varphi\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 求减区间.

13.【答案】 ①. 2 ②. 6

【分析】由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=4$，即 $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=4$ 求解;，即 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，由 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}$，利用数量积定义求解.

【详解】解：因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=4$，

所以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=4$，即 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$，

$=4-\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\theta=4-2\cos\theta$，

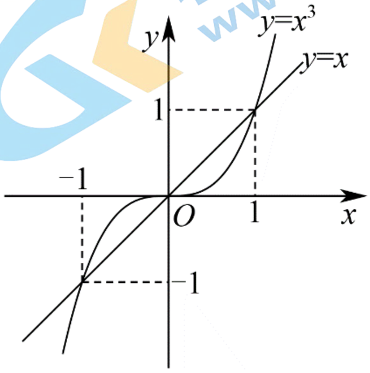
当 $\cos\theta=-1$ 时，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的最大值为 6，

故答案为：2，6

14. 【答案】-2(答案不唯一，满足 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 即可)

【分析】作出 $y=x$ 和 $y=x^3$ 的图象，数形结合即可得 a 的范围，从而得到 a 的可能取值.

【详解】$y=x$ 和 $y=x^3$ 的图象如图所示：



$\therefore$ 当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，$y=x^3$ 有部分函数值比 $y=x$ 的函数值小，

故当 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数.

故答案为：−2.

15. 【答案】②③④

【分析】根据表中数据以及营业利润率的概念逐项进行分析并判断.

【详解】由题中数据知，其它类营业收入占比 4.7%，为最低的，故①错；

生鲜区的净利润占比 $65.8\%>50\%$，故②正确；

生鲜区的营业利润率为 $\dfrac{65.8\%}{48.6\%}\times32.5\%=44\%>40\%$，故④正确；

熟食区的营业利润率为 $\dfrac{-4.3\%}{15.8\%}\times32.5\%<0$；

乳制品区的营业利润率为 $\dfrac{16.5\%}{20.1\%}\times32.5\%=26.68\%$；

其他区的营业利润率为$\frac{1.8\%}{4.7\%}\times 32.5\%=12.45\%$；

日用品区为$\frac{20.2\%}{10.8\%}\times 32.5\%=60.787\%$，最高，故③正确.

故答案为：②③④.

三、解答题：本大题共6小题，共85分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并写在答题纸相应位置.

16.【答案】（1）$f(x)=2\sin 2x$

（2）$T=\frac{\pi}{2}$，单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right]$，$k\in Z$

【分析】（1）由图象求得A及周期，再由周期公式求得ω，即可得到解析式；

（2）利用三角恒等变换公式将$g(x)$化简，再根据正弦函数的性质计算可得.

【小问1详解】

由图象可知$A=2$，$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}T$，即$T=\pi$，又$\omega>0$，

所以$T=\frac{2\pi}{\omega}$，解得$\omega=2$，$\therefore f(x)=2\sin 2x$；

【小问2详解】

因为$g(x)=f(x)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以$g(x)=2\sin 2x\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin 2x\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-\sin^2 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，

所以$g(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 4x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

解得$-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，

$g(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right]$，$k\in Z$.

17.【答案】（1）$\frac{\pi}{6}$

（2）答案见解析

【分析】（1）根据题意，利用倍角公式求得 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即可求解；

（2）根据题意，分别选择①②③，结合正弦定理和余弦定理，求得 a,c 的长，结合题意，即可求解.

【小问 1 详解】

解：由 $\triangle ABC$ 中，$\angle B\neq\dfrac{\pi}{2}$，且 $\cos 2B=\sqrt{3}\cos B-1$，

可得 $2\cos^2 B=\sqrt{3}\cos B$，所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

解：若选条件①：$\sin A=\sqrt{3}\sin C$，$b=2$，

因为 $\sin A=\sqrt{3}\sin C$，由正弦定理得 $a=\sqrt{3}c$，

又由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得 $a^2+c^2-\sqrt{3}ac=4$，

因为 $a=\sqrt{3}c$，代入解得 $a=2\sqrt{3},c=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

若选择条件②：$2b=3a$，$b\sin A=1$

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 且 $B=\dfrac{\pi}{6}$，可得 $a=2,b=3$，

又由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得 $c^2-2\sqrt{3}c-5=0$，

解得 $c=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\times\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$.

若选条件③：$AC=\sqrt{6}$，BC 边上的高为 2

因为 $B=\dfrac{\pi}{6}$，可得 $c=\dfrac{2}{\sin B}=4$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得 $a^2-4\sqrt{3}a+10=0$，解得 $a=2\sqrt{3}\pm2$，

此时 $\triangle ABC$ 存在但不唯一确定，不符合题意.

18.【答案】（1）$\dfrac{8}{105}$

（2）0.32　（3）$\mu_1>\mu_2$

【分析】（1）分别求出样本中男生和女生的人数，再由频率估计概率即可得解；

（2）根据题意易得从该区九年级全体男生中随机抽取 1 人和从该区九年级全体女生中随机抽取 1 人选考跳绳的概率，再分 2 个男生选考跳绳和 1 个男生和 1 个女生选考跳绳结合独立事件的概率公式即可得解；

（3）根据平均数公式分别求出 μ_1,μ_2，即可得解.

【小问 1 详解】

解：样本中男生的人数为$1100\times10\%=110$人，

样本中女生的人数为$1000\times5\%=50$人，

设从该区所有九年级学生中随机抽取 1 名学生，该学生选考乒乓球为事件 A，

则该学生选考乒乓球的概率 $P(A)=\dfrac{110+50}{1100+1000}=\dfrac{8}{105}$；

【小问 2 详解】

解：设从该区九年级全体男生中随机抽取 1 人，选考跳绳为事件 B，

从该区九年级全体女生中随机抽取 1 人，选考跳绳为事件 C，

由题意 $P(B)=0.4,P(C)=0.5$，

则从该区九年级全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人选考 1 分钟跳绳的概率为$C_2^1\times0.4\times(1-0.4)\times0.5+C_2^2\times0.4^2\times(1-0.5)=0.32$；

【小问 3 详解】

解：$\mu_1=\dfrac{100\times8+40\times7.5+20\times7}{160}=\dfrac{31}{4}$，

$\mu_2=\dfrac{60\times8+40\times7.5+10\times7}{110}=\dfrac{85}{11}$，

所以 $\mu_1>\mu_2$.

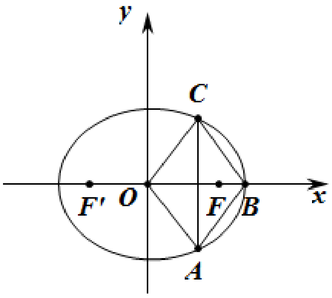
19.【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（2）$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

【分析】（1）依题意，当四边形 $OABC$ 为菱形，AC 与 OB 相互垂直和平分，设 A 点坐标，然后求出菱形面积.

（2）分类讨论，分直线与 x 轴和不垂直时，设直线方程，联立椭圆方程，利用韦达定理及中点坐标公式求出中点坐标，列垂直平分线所在方程，根据基本不等式性质，即可求得实数 m 的取值范围.

【小问 1 详解】



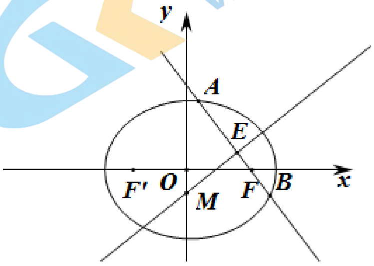
椭圆 W：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右顶点 B 的坐标为 $\left(\sqrt{2},0\right)$，

因为四边形 $OABC$ 为菱形，所以 AC 与 OB 相互垂直和平分，

所以可设 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},m\right)$，代入椭圆方程得 $\dfrac{1}{4}+m^2=1$，即 $m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以菱形 $OABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|OB|\cdot|AC|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2|m|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

【小问 2 详解】



当直线 AB 垂直 x 轴时，$m=0$，此时 $|MA|=|MB|$，符合题意；

当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-1\right)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k\left(x-1\right)\end{cases}$，得

$\left(1+2k^2\right)x^2-4k^2x+2\left(k^2-1\right)=0$，

由 $\Delta=\left(-4k^2\right)^2-8\left(1+2k^2\right)\left(k^2-1\right)>0$ 得 $x\in\mathbf{R}$.

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2\left(k^2-1\right)}{1+2k^2}$，

所以 $y_1+y_2=k\left(x_1+x_2-2\right)=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$，

所以线段 AB 中点 E 的坐标为 $\left(\dfrac{2k^2}{1+2k^2},-\dfrac{k}{1+2k^2}\right)$，

由题意知$k\neq 0$，故直线ME的方程为$y+\dfrac{k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{2k^2}{1+2k^2}\right)$，

令$x=0$，$y=\dfrac{k}{1+2k^2}$，即$m=\dfrac{k}{1+2k^2}$，

当$k>0$时，得

$0<m=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+2k}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，等号成立，

同理，当$k<0$时，得

$0>m=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+2k}\geq-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，等号成立，

综上所述，实数m的取值范围为$\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

20.【答案】（1）$y=2x-1$

（2）答案见解析　（3）证明见解析

【分析】（1）求导，由导数的几何意义求出切线方程；

（2）求出$f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{e^x}$，分$0<a<\dfrac{1}{2}$、$a=\dfrac{1}{2}$、$a>\dfrac{1}{2}$，讨论$y=f(x)$的单调性可得答案；

（3）当$a\leq-1$时，令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{a}$或$x=2$，$f(x)$取得极小值$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-e^{-\frac{1}{a}}$，

$-e^{-\frac{1}{a}}\in[-e,1)$，由极小值定义及$f(x)$的单调性可知：当$x<2$时，$f(x)\geq-e$；

$x\geq 2$时，设$g(x)=-ax^2+x-1,(x\geq 2，a\leq-1)$，由二次函数的性质可知$g(x)>g(2)>0$恒成立，可得答案.

【小问1详解】

$$f'(x)=\frac{(-ax^2+x-1)'\cdot e^x-\left(-ax^2+x-1\right)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{ax^2-(2a+1)x+2}{e^x}=\frac{(ax-1)(x-2)}{e^x},$$

因为$f'(0)=2$，$f(0)=-1$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,-1)$处的切线方程为$y=2x-1$.

【小问2详解】

由（1）知：$f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{e^x}$，（$x\in R$），

因为$a>0$，令$f'(x)=0$，所以$x=\dfrac{1}{a}$或$x=2$，

当$0<a<\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{a}>2$，

则x，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$\left(2,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当$a=\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{a}=2$，则$f'(x)\geq 0$恒成立，$f(x)$在R内恒增；

当$a>\frac{1}{2}$时，$0<\frac{1}{a}<2$，则x，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上，当$0<a<\frac{1}{2}$时，单调递增区间是$(-\infty,2)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，单调递减区间是$\left(2,\frac{1}{a}\right)$；

当$a=\frac{1}{2}$时，单调递增区间是$(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；

当$a>\frac{1}{2}$时，单调递增区间是$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$和$(2,+\infty)$，单调递减是$\left(\frac{1}{a},2\right)$.

【小问3详解】

当$a\leq -1$时，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{a}$或$x=2$，易知$\frac{1}{a}\in[-1,0)$，

则x，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以当$x=\frac{1}{a}$时，$f(x)$取得极小值$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}=-e^{-\frac{1}{a}}$，

由于 $a\le -1$，则 $\frac{1}{a}\in[-1,0)$，$-\frac{1}{a}\in(0,1]$，$e^{-\frac{1}{a}}\in(1,\ e]$，$-e^{-\frac{1}{a}}\in[-e,1)$，

所以由极小值定义及 $f(x)$ 的单调性可知：当 $x<2$ 时，$f(x)\ge -e$，

接下来，研究 $f(x)$ 在 $x\ge 2$ 的变化情况，

因为 $e^x>0$ 恒成立，设 $g(x)=-ax^2+x-1,(x\ge 2,\ a\le -1)$，

对称轴 $x=\frac{1}{2a}<0$，$\Delta=1-4a>0$，抛物线开口向上，$g(2)=1-4a>0$，

所以由二次函数的性质可知：当 $x\ge 2$ 时，$g(x)>g(2)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)>0$ 在 $x\ge 2$ 时恒成立.

综上所述：当 $a\le -1$ 时，$f(x)\ge -e$.

21.【答案】(I) a_k 可以等于 $k-1$，但 a_k 不能等于 $\frac{k}{2}-1$；(II) 100；(III) N 存在最大值，为 200 .

【分析】(I) 根据题意可得出结论；

(II) 根据 (I) 中的结论得出 a_k 可以等于 $k-1$，可得出区间 I_k 的长度为1，结合①得出 $N\geqslant 100$，再由 $I_1=[0,1]$，$I_2=[1,2]$，$\cdots$，$I_{100}=[99,100]$ 满足条件①、②可得出 N 的最小值；

(III) 利用反证法推导出 $a_{k+1}>a_{k-1}+1$，进而得出 $a_{200}+1>100$，由此得出 $[0,100]\subseteq(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{200})$，进而得出 $N\leqslant 200$，再举例说明 $N=200$ 成立，由此可得出正整数 N 的最大值.

【详解】(I) a_k 可以等于 $k-1$，但 a_k 不能等于 $\frac{k}{2}-1$；

(II) 记 $b-a$ 为区间 $[a,b]$ 的长度，则区间 $[0,100]$ 的长度为100，I_k 的长度为1.

由①，得 $N\geqslant 100$.

又因为 $I_1=[0,1]$，$I_2=[1,2]$，$\cdots$，$I_{100}=[99,100]$ 显然满足条件①，②.

所以 N 的最小值为100；

(III) N 的最大值存在，且为 200 .

解答如下：(1) 首先，证明 $N\leqslant 200$.

由②，得 I_1、I_2、$\cdots$、I_N 互不相同，且对于任意 k，$I_k\cap[0,100]\ne\varnothing$.

不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$.

如果 $a_2\leqslant 0$，那么对于条件②，当 $k=1$ 时，不存在 $x\in[0,100]$，使得 $x\notin I_i\ (i=1,2,\cdots,N)$.

这与题意不符，故 $a_2>0$.

如果 $a_{k+1}\leqslant a_{k-1}+1$，那么 $I_k\subseteq(I_{k-1}\cup I_{k+1})$，

这与条件②中“存在 $x\in[0,100]$，使得 $x\notin I_i$（其中 $i=1$、2、…、$k-1$、$k+1$、…、N）”矛盾，故 $a_{k+1}>a_{k-1}+1$.

所以 $a_4>a_2+1$，$a_6>a_4+1>2$，…，$a_{200}>a_{198}+1>99$，则 $a_{200}+1>100$.

故 $[0,100]\subseteq(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{200})$.

若存在 I_{201}，这与条件②中“存在 $x\in[0,100]$，使得 $x\notin I_i(i=1,2,\cdots,200)$”矛盾，

所以 $N\leqslant 200$.

（2）给出 $N=200$ 存在的例子.

令 $a_k=-\frac{1}{2}+\frac{100}{199}(k-1)$，其中 $k=1$、2、…、200，即 a_1、a_2、…、a_{200} 为等差数列，公差 $d=\frac{100}{199}$.

由 $d<1$，知 $I_k\cap I_{k+1}\neq\varnothing$，则易得 $I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{200}=\left[-\frac{1}{2},\frac{201}{2}\right]$，

所以 I_1、I_2、…、I_{200} 满足条件①.

又公差 $d=\frac{100}{199}>\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{100}{199}(k-1)\in I_k$，$\frac{100}{199}(k-1)\notin I_i(i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,N)$.（注：$\frac{100}{199}(k-1)$ 为区间 I_k 的中点对应的数）

所以 I_1、I_2、…、I_{200} 满足条件②.

综合（1）（2）可知 N 的最大值存在，且为 200.

【点睛】本题考查数列与区间的综合应用，考查反证法的应用，考查推理论证能力，属于难题.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！